غلاف الحقيبة

يتم إدراجه لاحقاً من قبل الإدارة العامة للمناهج

مقدمة

الحمد لله الذي علَّم بالقلم، علَّم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على من بُعث مُعلماً للناس وهادياً وبشيراً، وداعياً إلى الله بإذنه وسراجاً منيراً؛ فأخرج الناس من ظلمات الجهل والغواية، إلى نور العلم والهداية، نبينا ومعلمنا وقدوتنا الأول محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه أجمعين، أما بعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل السعودي، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي، لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة للمناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي تلك المتطلبات، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية ومن بعده مشروع المؤهلات المهنية الوطنية، والذي يمثل كل منهما في زمنه، الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير وكذلك المؤهلات لاحقاً في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية "........" لمتدربي برنامج "......" في المعاهد الصناعية الثانوية ومعاهد العمارة والتشييد، موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا البرنامج لتكون مهاراتها رافداً لهم في حياتهم العملية بعد تخرجهم من هذا البرنامج. والإدارة العامة للمناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجلً أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط خالٍ من التعقيد.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه؛ إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة للمناهج

الفهــرس

□

تمهيد

الهدف العام من الحقيبة :

تهدف هذه الحقيبة إلى إكساب المتدرب المعارف والمهارات التأسيسية في عدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية.

تعريف بالحقيبة :

تقدم هذه الحقيبة

الوقت المتوقع لإتمام التدريب على مهارات هذه الحقيبة التدريبية :

يتم التدريب على مهارات هذه الحقيبة في 64 ساعة تدريبية ، موزعة كالتالي:

الوحدة الأولى:	المجموعات	8 ساعات تدريبية
الوحدة الثانية:	العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية	6 ساعة تدريبية
الوحدة الثالثة:	كثيرات الحدود	14 ساعات تدريبية
الوحدة الرابعة:	المصفوفات والمحددات	12 ساعات تدريبية
الوحدة الخامسة:	المعادلات	16 ساعات تدريبية
الوحدة السادسة:	الهندسة المستوية والفراغية	8 ساعات تدريبية

الأهداف التفصيلية للحقيبة :

من المتوقع في نهاية هذه الحقيبة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. الالمام بمفهوم المجموعات وخصائصها والعمليات عليها.
٢. يميز بين المجموعات العددية والقدرة على اجراء العمليات الحسابية عليها.
٣. الالمام بمفهوم كثيرات الحدود والقدرة على تبسيطها وتحليلها واختصار الكسور الجبرية.
٤. التعامل مع المصفوفات والمحددات والمقدرة على استعمالها.

٥. القدرة على حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ومجموعة المعادلات الخطية ذات مجهولين أو ثلاثة.

٦. الالمام بكيفية حساب المساحات والمحيطات والاحجام لأشكال هندسية مستوية وفارغة

الوحدة الأولى

المجموعات

الوحدة الأولى

المجموعات

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها والمجموعات العددية المشهورة والقيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الاعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. تعريف المجموعة وتحديد خصائصها.

٢. اجراء العمليات على المجموعات.

٣. تصنيف الاعداد حسب مجموعاتها العددية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

المجموعات

تعريف 1:

المجموعة هي أي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها من الأشياء بشكل دقيق وقاطع لا يختلف فيه، وكل عنصر منها يعتبر كائن مستقل بذاته في المجموعة.

مثلاً لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

b) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.

نعتبر a) مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق لأن الجمال نسبي وليس دقيق ويتفاوت من حديقة الى حديقة أخرى.

2.1 رمز المجموعة وعناصرها

نرمز للمجموعات (تسميتها) عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل $A,B,C,....,Y,Z$ والاشياء التي تتألف منها المجموعات تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغير مثل $a,b,c,...,y,z$

3.1 طرق كتابة المجموعة:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { } وعناصر المجموعة تكتب داخل القوسين ، **ومثال** على ذلك :

$$A=\{2,a,3,5,7,b,s,m\}$$

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين :

1.3.1 طريقة السرد (الحصر) :

مثل مجموعة الحروف المكونة لكلمة red هي: $A=\{r,e,d\}$

2.3.1 طريقة الوصف:

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميز عناصر المجموعة $B=\{x:$ الخاصية أو الصفة $\}$

مثلاً مجموعة أيام الأسبوع $B=\{x:x$ يوم من أيام الاسبوع $\}$

4.1 العلاقة بين العنصر وا لمجموعة:

تكون العلاقة بين العنصر والمجموعة اما ينتمي بالرمز $\in$ أو لا ينتمي بالرمز $\notin$

مثلاً المجموعة $A=\{2,4,7,a,c\}$

العنصر 2 هو أحد عناصر المجموعة A يقال 2 ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز ($2\in A$)

العنصر 8 ليس أحد عناصر المجموعة A يقال 8 لا ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز ($8\notin A$)

5.1 المجموعة الجزئية:

نقول ان A هي مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر المجموعة A موجودة في المجموعة B ونرمز $A\subseteq B$ أي انها علاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى ، ويمكن كتابتها رياضيا كالتالي:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\,x\epsilon A\Rightarrow x\epsilon B\square$$

إذا كانت $A\subseteq B$ و $A\neq B$ فنقول ان A مجموعة جزئية فعلية من B ونكتب $A\subset B$

أما اذا كانت A ليس مجموعه جزئية فعلية من B فتكتب $A\not\subset B$

مثلاً اذا كانت لدينا المجموعتين $A=\{1,2,3\}\,,\quad B=\{1,2,3,4,5\}$

وبالتالي $A\subseteq B$ (A مجموعه جزئيه من B) لأن جميع عناصر المجموعة A موجودة في B.

ولكن $B\not\subset A$ (B ليست مجموعه جزئيه من A)، لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل ليس موجود في المجموعة A.

مثال 1: اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin, \nsubseteq$, $\subseteq$ في الفراغ المناسب:

a) 2……… A , b) 1…………B
c) 6 ………B , d) 8 …………A
e) $\{1,2,3\}$…….A , f) $\{1\}$ ………B
$g)$ $\{8,9\}$………B , h) $\{6,7\}$……….A

الحل:

a) $2 \in A$, b) $1 \in B$
b) $6 \notin B$, d) $8 \notin A$
$e)$ $\{1,2,3\} \subseteq A$, f) $\{1\} \subseteq B$
$g)$ $\{8,9\} \nsubseteq B$, h) $\{6,7\} \nsubseteq A$

تمرين1: اذا كانت $A = \{a, b, c, 4, d\}$, $B = \{a, b\}$ اكتب العبارات التالية $\subseteq$ $\nsubseteq$; , $\in$; $\notin$ في الفراغ المناسب

a) a……… A , b) b…………B
c) c ………B , d) e …………A
e) $\{a, b\}$…….A , f) $\{b\}$ ………B
g) $\{c, d\}$………B , h) $\{e, f\}$……….A

6.1 تساوي مجموعتين:

يقال للمجموعتين A و B متساويتين ونكتب $A = B$ اذا كانت كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى ($A \subseteq B$ و $B \subseteq A$) أي ان:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall\, x\epsilon A \implies x\epsilon B \text{ و} \forall\, x\epsilon B \implies x\epsilon A)\square$$

مثل إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,1\}$ فان $A = B$

لأن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

أي أن عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B لهما العناصر نفسها ، وترتيب العناصر في المجموعة غير مهم.

تمرين2: اذا كانت $A = B$ حيث ان $A = \{2,5,6,9\}$ و $B = \{5, x, 2,9\}$ فان قيمة x

$a)\ \ 6$ $b)\ \ 5$ $c)\ \ 9$ $d)\ \ 2$

7.1 أنواع المجموعات :

١. **المجموعة الخالية :** هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\ \}$

مثل مجموعة الاعداد الزوجية بين العددين 2.5 و 3.5

٢. **مجموعة وحيدة العنصر :** هي مجموعة مكونة من عنصر وحيد .

مثلاً مجموعة الاعداد الزوجية التي هي اكبر من العدد 1 واقل من العدد 3

٣. **المجموعة المنتهية :**ـ وهي المجموعة التي تحتوي عدد محدود من العناصر.

مثل أيام الأسبوع

٤. **المجموعة اللانهائية (الغير منتهية):** وهي المجموعة التي تحتوي عدد غير محدود من العناصر

مثلاً مجموعة الأعداد الطبيعة الزوجية

٥. **المجموعة الشاملة :** هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر تحت الدراسة ويرمز لها U .

خصائص المجموعة الجزئية:

$1)\ \emptyset \subseteq A \subseteq U$ $\quad 2)\ A \subseteq A$ $\quad 3)\ A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

8.1 العمليات على المجموعات

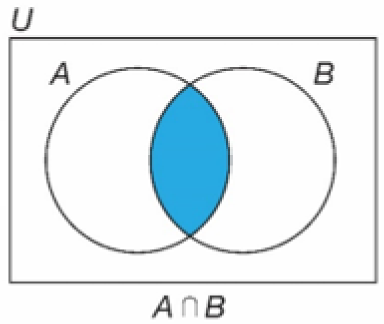
1- تقاطع مجموعتين:

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر المشتركة بين A و B وتكتب كالتالي: $A \cap B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بشكل فن حيث U المجموعة الشاملة بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون تقاطعهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:

(شكل 1 − 1)



مثال2: اذا كانت $B = \{2,4,3\}$ و $A = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cap B$.

الحل: $A \cap B = \{3,4\}$

مثال3: اذا كانت $D = \{50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cap D$.

الحل: $C \cap D = \phi$

<u>خصائص التقاطع:</u>

1) $A \cap A = A$
2) $A \cap U = A$
3) $A \cap \phi = \phi$
4) $A \cap B = B \cap A$
5) $(A \cap B) \subseteq A \, , (A \cap B) \subseteq B$
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

تمرين3: اذا كانت $A = \{1,3,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فان $A \cap B$.

$a)\ \{1,5,a\}$ $b)\ \{1,a\}$ $c)\ \{20,5,a\}$ $d)\ \phi$

تمرين4: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cap D$.

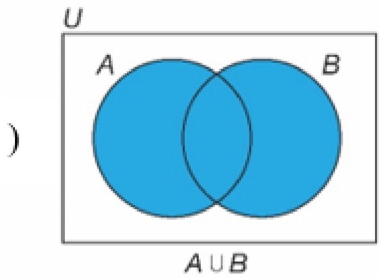
$a)\ \{30,60,90\} \quad b)\ \{20,50\} \quad c)\{20,50,90\} \quad d)\ \phi$

٢- **اتحاد مجوعتين:**

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جميع عناصر المجموعتين A و B بدون تكرار العنصر ويرمز لهما بالرمز $A \cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{أو} \ x \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد في شكل فن بالمنطقة المظللة كالشكل التالي:



(شكل 1 − 2)

خصائص الاتحاد:

1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup U = U$ 3) $A \cup \phi = A$ 4) $A \cup B = B \cup A$
5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 6) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$

مثال4: اذا كانت $A = \{2,4,3\}$ و $B = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cup B$.

الحل : $A \cup B = \{1,3,4,5,2\}$

مثال5: اذا كانت $D = \{,50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cup D$.

الحل : $C \cup D = \{10,30,m,k,50,100\}$

تمرين5: اذا كانت $A = \{1,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فان $A \cup B$ يساوي:

$a)\ \{1,5,a,20,8\} \quad b)\ \{1,5,a\} \quad c)\{8,20\} \quad d)\ \phi$

تمرين6: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cup D$ يساوي:

$a)\ \{30,60,90,10,20,50\} \quad b)\ \{10,20,50\} \quad c)\{30,60,90\} \quad d)\ \phi$

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع:

اذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات فان :

أي ان الاتحاد توزيع على التقاطع $1)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

أي ان التقاطع توزيع على الاتحاد $1)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

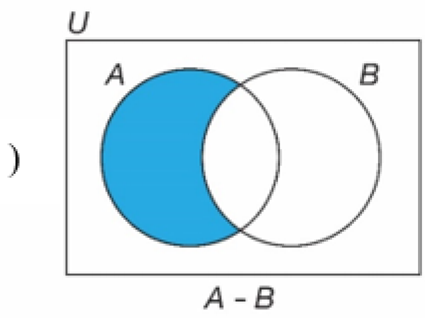
3-الفرق بين مجموعتين :

نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في A وليست في B ويرمز لها بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل الفرق $A - B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:



(شكل 1 – 3)

خصائص الفرق:

$1)\ A - A = \phi$

$2)\ A - U = \phi$

$3)\ A - \phi = A$

$4)\ A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

$5)\ A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

$6)\ A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

مثال6: اذا كانت $A = \{2,4,3,5\}$ و $B = \{1,3,a,5,b\}$ اوجد $A - B$ و $B - A$

الحل :

$$A - B = \{2,4\}$$

$$B - A = \{1, a, b\}$$

تمرين 7: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $C - D$

$a)\ \{30,40\}$ $\quad b)\ \{10,20,50\}$ $\quad c)\{30,60,90\}$ $\quad d)\ \phi$

تمرين8: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $D - C$

$a)\ \{30,40\} \qquad b)\ \{20,100\} \qquad c)\{30,60,90\} \qquad d)\ \phi$□

تمرين9: اذا كانت $A = \{10,20,30\}$ و $B = \{10,20,30\}$ فان $A - B$

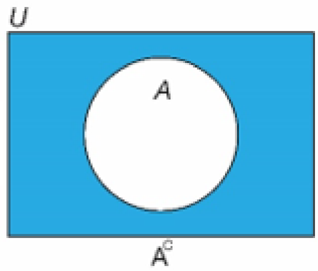
$a)\ \{10,20,30\} \qquad b)\ \{10,20,30\} \qquad c)\{30\} \qquad d)\ \phi$□

٤- متممة المجموعة :

اذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A نعرف متممة A بانها مجموعة جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U وليست في A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^C وتعرف رياضيا:

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل المتممة $\bar{A}$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في لشكل التالي:



(شكل 1 – 4)

مثال7: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,2,3\}$ اوجد $\bar{A}$

الحل: $\bar{A} = \{4,5,6,7\}$

مثال8: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ اوجد $\bar{B}$

الحل: $\bar{B} = \emptyset$

<u>**خصائص المتممة:**</u>

1) $\bar{A} \cup A = U$□ 2) $\bar{A} \cap A = \emptyset$□ 3) $\bar{\emptyset} = U$□

4) $\bar{U} = \emptyset$□ 5) $\bar{\bar{A}} = A$□

تمرين10: اذا كانت $U = \{10,20,30,40,50\}$ و $A = \{10,20\}$ فان $\bar{A}$

$a)\ \{10,20,30\} \quad b)\ \{30,40,50\} \quad c)\ \{40,50\} \quad d)\ \emptyset$

تمرين11: اذا كانت $U = \{60,70,80,90,100\}$ و $B = \{60,70,80,90,100\}$
فان $\bar{B}$

$a)\ \{60,70,80,90,100\} \quad b)\ \{60,70,80\} \quad c)\ \{90,100\} \quad d)\ \emptyset$ □

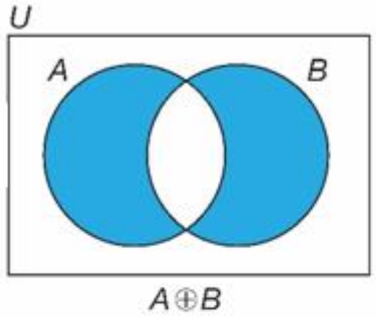
٥- الفرق التناظري بين مجموعتين :

نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر الموجودة اما في A أو في B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \oplus B$ ونكتب رياضيا:

$$A \oplus B = \{x : x \in A \cup B \text{ و } x \notin A \cap B\}$$ □

ويمكن تمثيل الفرق التناظري $A \oplus B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:

(شكل 1 – 5)



مثال9: اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,7\}$ اوجد $A \oplus B$

الحل : $A \oplus B = \{7,3,4,5\}$

تمرين12: اذا كانت $A = \{20,40,60,80\}$ و $B = \{20,30,40,50\}$ فان $A \oplus B$

$a)\ \{20,30,40,50\} \quad b)\ \{30,50,60,80\} \quad c)\ \{20,40,60,80\} \quad d)\ \emptyset$

خصائص الفرق التناظري:

1) $A \oplus A = \emptyset$, 2) $A \oplus \emptyset = A$,3) $A \oplus U = \bar{A}$, 4) $A \oplus B = B \oplus A$
5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$,6) $A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

9.1 قانون ديمورغان :

1- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال 10 : اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{10,20,30,40,50\}$

وكانت $A = \{10,30\}, B = \{30,50\}, C = \{40,50\}$ اوجد

1) $A \cap B$ 2) $A \cap C$ 3) $A \cup B$ 4) $B \cup C$ 5) $A - B$

6) $C - B$ 7) A^c 8) B^c 9) C^c 10) $A \oplus B$

الحل :

1) $A \cap B = \{30\}$
2) $A \cap C = \emptyset$
3) $A \cup B = \{10,30,50\}$
4) $B \cup C = \{30,50,40\}$
5) $A - B = \{10\}$
6) $C - B = \{40\}$
7) $A^c = \{20,40,50\}$
8) $B^c = \{10,20,40\}$
9) $C^c = \{10,20,30\}$
10) $A \oplus B = \{10,50\}$

تمرين 13 : اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

وكانت $A = \{1,3,5,6\}, B = \{2,5,9\}, C = \{4,7\}$ اوجد

1) $A \cap B =$

a) $\{5\}$ b) $\{1,3\}$ c) $\{1,3,5,6,2,9\}$ d) $\emptyset$

2) $A \cap C =$

a) $\{1,3\}$ b) $\{1,3,5,6,4,7\}$ c) $\{4,7\}$ d) $\emptyset$

4) $B \cup C =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3\}$ $c)\ \{2,5,9,4,7\}$ $d)\ \emptyset$☐

5) $A - B =$

$a)\ \{10,4,7\}$ $b)\ \{1,3,6\}$ $c)\ \{2,5\}$ $d)\ \emptyset$☐

6) $C - B =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3\}$ $c)\ \{2,5,9,4,7\}$ $d)\ \emptyset$☐

7) $A^c =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3,5,6\}$ $c)\ \{2,4,7,8,9,10\}$ $d)\ \emptyset$☐

8) $C^c =$☐

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,2,3,5,6,8,9,10\}$ $c)\ \{8,9,10\}$ $d)\ \emptyset$☐

10) $A \oplus B$☐

$a)\ \{1,3,5,6,2,9\}$ $b)\ \{1,3,6,2,9\}$ $c)\ \{5\}$ $d)\ \emptyset$☐

المجموعات العددية

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها.

مجموعة الأعداد الطبيعية:

هي مجموعة الاعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N

$$N = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الكلية:

هي مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مضافا اليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W

$$W = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة:

هي مجموعة الاعداد الكلية مضافا اليها مجموعة الاعداد السالبة ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية):

هي مجموعة الاعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر ($\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$) ، بحيث المقام لا يساوي صفر ، ونرمز لها بالرمز Q ويمكن كتابتها على الصورة , $Q = \{x : x = \frac{a}{b}$
$a, b \in Z, b \neq 0\}$

مجموعة الأعداد الغير كسريه (غير نسبية):

هي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل : $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{5}}, e, \pi$
ويرمز لها بالرمز $(\bar{Q})$.

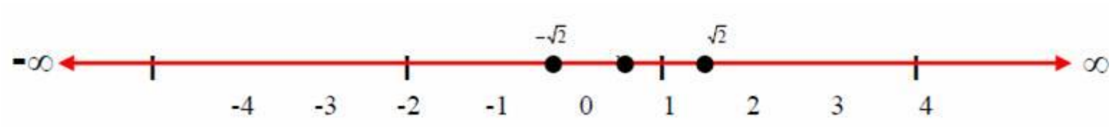
فمثلا التمثيل العشري للأعداد غير الكسرية:

$$\pi = 3.1415 \dots \quad ; \quad e = 2.71828 \dots \quad ; \quad \sqrt{3} = 1.7320508 \dots$$

ملاحظه 1 : التقريب النسبي للعدد الغير النسبي π هو $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

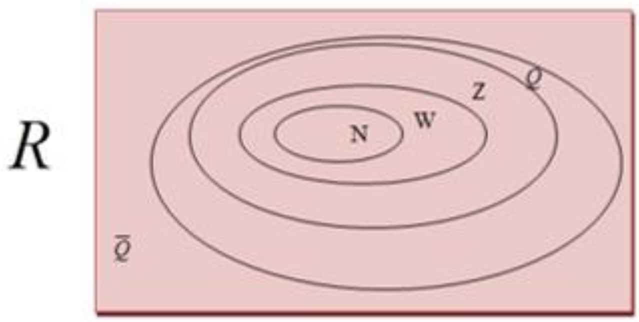
مجموعة الأعداد الحقيقية :

هي مجموعة جميع الاعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والكسرية والغير كسرية ويرمز لها بالرمز R ويمكن تمثيلها بيانيا بنقاط على خط افقي يسمى خط الاعداد الحقيقية ، بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والاعداد الموجبة على اليمين والاعداد السالبة عل اليسار كما في الشكل التالي:



ملاحظه

1) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \bar{Q} \subseteq R$
2) $Q \cup \bar{Q} = R$
3) $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$



تمارين

١. يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز

a) R b) Z c) N d) Q

٢. يرمز لمجموعة الاعداد الغير كسريه بالرمز

a) R b) Z c) W d) $\bar{Q}$

٣. يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

٤. يرمز لمجموعة الاعداد الكسرية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

٥. يرمز لمجموعة الاعداد الكلية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

٦. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ فان

a) $A \subseteq B$ b) $A \nsubseteq B$ c) $A \in B$ d) $A \notin B$

٧. اذا كانت $B = \{1,2,3\}$ فان

a) $1 \subseteq B$ b) $1 \nsubseteq B$ c) $1 \in B$ d) $1 \notin B$

٨. يرمز للمجموعة الخالية بالرمز

a) A b) Ø c) U d) A^c

٩. يرمز للمجموعة الشاملة بالرمز

a) A b) Ø c) U d) A^c

١٠. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ فان $A \cup B =$

a) $\{4,5\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

١١. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$ فان $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

١٢. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,4\}$ فان $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

١٣. اذا كانت $B = \{ 1,2\}$ و $A = \{ 1,2,3,4\}$ فان $A - B =$

a) $\{ 1,2,3,4\}$ b) $\{ 1\}$ c) $\{ 3,4\}$ d) $\{ 1,2\}$

١٤. اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $A = \{1,2\}$ و فان $\bar{A} =$

a) $\{1,2\}$ b) $\{1,3\}$ c) $\{4,2\}$ d) $\{3,4,5\}$

١٥. يرمز لمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز

a) N b) W c) Q d) R

١٦. $(\overline{A \cap B}) =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

١٧. $(\overline{A \cup B}) =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

١٨. العدد التالي يمثل عدد طبيعي

a) π b) -1 c) 0 d) 5

١٩. العدد التالي يمثل عدد صحيح

a) π b) -6 c) e d) $\frac{2}{3}$

٢٠. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,4,5\}$ فان $A \oplus B$ تساوي

a) $\{3,4,5\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.

م	العناصـــر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
١					
٢					
٣					
٤					
٥					
٦					

يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: ....
رقم المتدرب :	المحاولة : ☐ ☐ ☐ ☐ العلامة : ....
كل بند أو مفردة يقيم بـ ☐☐ نقاط الحد الأدنى: ما يعادل ☐☐٪ من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل ☐☐☐٪ من مجموع النقاط.	

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		☐	☐	☐	☐
١					
٢					
٣					
٤					
٥					
٦					
المجموع					

ملحوظات:

....

توقيع المدرب: ....

الوحدة الثانية

العمليات الحسابية

الوحدة الثانية

العمليات الحسابية

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى القيام بالعمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. القيام بالعمليات الحسابية على العداد النسبية والعشرية.

٢. تقريب الاعداد العشرية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 6 ساعات تدريبية.

العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية

الكسر عباره عن بسط ومقام ($\frac{a}{b}$) ، بحيث a البسط و b المقام ، المقام لا يساوي صفر ($b \neq 0$)

1.2 خصائص الكسور :

إذا كانت a, b, c, d أعداد حقيقية فإن:

-1 ضرب الكسور

هي عبارة عن حاصل ضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad b, d \neq 0$$

مثال1: احسب ما يلي

$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} =$ $\qquad b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} =$ $\qquad c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} =$ $\qquad d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} =$

الحل:

$$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \frac{4 \times -5}{5 \times 6} = \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3}$$

$$c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \frac{-3 \times -2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{-2 \times 6}{3 \times 13} = \frac{-12}{39} = \frac{-4}{13}$$

تمرين1 : اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{5}{6}\times\frac{3}{6}=$

$a)\ \frac{15}{12}$ $\quad b)\ \frac{15}{36}$ $\quad c)\ \frac{8}{36}$ $\quad d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{-4}{5}\times\frac{7}{8}=$

$a)\ \frac{-28}{40}$ $\quad b)\ \frac{-11}{13}$ $\quad c)\ \frac{3}{13}$ $\quad d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6}\times\frac{-2}{4}=$

$a)\ \frac{-7}{24}$ $\quad b)\ \frac{-10}{24}$ $\quad c)\ \frac{7}{24}$ $\quad d)\ \frac{10}{24}$

2- قسمة الكسور

عند قسمة كسرين نحول عملية القسمة الى عملية ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}\qquad b,c\neq 0$$

مثال2: احسب ما يلي:

$$a)\ \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \qquad b)\ \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \qquad c)\ \frac{-3}{8} \div \frac{-9}{7} =$$

الحل:

$$a)\ \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{4 \times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$b)\ \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \frac{3}{7} \times \frac{6}{-2} = \frac{3 \times 6}{7 \times -2} = \frac{18}{-14} = -\frac{18}{14} = -\frac{9}{7}$$

$$c)\ \frac{-3}{8} \div \frac{9}{-7} = \frac{-3}{8} \times \frac{-7}{9} = \frac{-3 \times -7}{8 \times 9} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$$

تمرين2: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1)\ \frac{5}{6} \div \frac{3}{6} =$$

$a)\ \frac{8}{12}$ $\quad b)\ \frac{15}{12}$ $\quad c)\ \frac{8}{36}$ $\quad d)\ \frac{30}{18}$

$$2)\ \frac{-4}{5} \div \frac{7}{8} =$$

$a)\ \frac{-32}{35}$ $\quad b)\ \frac{-11}{13}$ $\quad c)\ \frac{3}{13}$ $\quad d)\ \frac{-24}{40}$

$$3)\ \frac{-5}{6} \div \frac{-2}{4} =$$

$a)\ \frac{7}{24}$ $\quad b)\ \frac{-10}{24}$ $\quad c)\ \frac{20}{12}$ $\quad d)\ \frac{-7}{24}$

3- جمع وطرح الكسور□

عند جمع او طرح كسرين فان لدينا حالتين:

a) المقامات متساوية.

□b) المقامات غير متساوية.

a) المقامات متساوية.

عند جمع او طرح كسرين ذات مقامات متساوية فإننا نجمع او نطرح البسط ونكتب المقام نفسه .

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad b \neq 0$$

مثال3 : احسب ما يلي :

$a)\ \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \qquad b)\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \qquad c)\ \frac{-3}{7} + \frac{1}{7} = \qquad d)\ \frac{-2}{8} - \frac{-3}{8} =$

$$a)\ \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$b)\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$c)\ \frac{-3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{-3+1}{7} = \frac{-2}{7}$$

$$d)\ \frac{-2}{8} - \frac{-3}{8} = \frac{-2+3}{8} = \frac{1}{8}$$

□**تمرين3**: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1)\ \frac{5}{6} + \frac{3}{6} =$$

$a)\ \frac{8}{6}$ $b)\ \frac{15}{12}$ $c)\ \frac{8}{36}$ $d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{4}{8}-\frac{7}{8}=$

$a)\ \frac{-24}{40}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{3}{13}$ $d)\ \frac{-3}{8}$

3) $\frac{-5}{9}-\frac{3}{9}=$

$a)\ \frac{-10}{24}$ $b)\ \frac{-8}{9}$ $c)\ \frac{7}{24}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

b) المقامات غير متساوية:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)\pm(c\times b)}{b\times d} \qquad b\,,d\neq 0$$

مثال4 : احسب ما يلي

$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$ $b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=$ $c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=$ $d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=$

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{(2\times 4)+(3\times 5)}{5\times 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$$

$$b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{(4\times 6)-(5\times 5)}{5\times 6}=\frac{24-25}{30}=\frac{-1}{30}$$

$$c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{(-3\times 6)+(2\times 4)}{4\times 6}=\frac{-18+8}{24}=\frac{-10}{24}$$

$$d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=\frac{(-2\times 9)-(7\times 3)}{3\times 9}=\frac{-18-21}{27}=\frac{-39}{27}$$

تمرين4: اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{2}{6}+\frac{5}{8}=$

$a)\ \frac{7}{14}$ $b)\ \frac{7}{48}$ $c)\ \frac{2}{14}$ $d)\ \frac{46}{48}$

2) $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=$

$a)\ \frac{-3}{18}$ $b)\ \frac{-2}{13}$ $c)\ \frac{5}{18}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-7}{8}-\frac{1}{2}=$

$a)\ \frac{-7}{8}$ $b)\ \frac{-10}{16}$ $c)\frac{-22}{16}$ $d)\ \frac{-1}{2}$

العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

2.2 العمليات الحسابية على الاعداد العشرية:

١- جمع وطرح الاعداد العشرية:

يتم جمع وطرح الاعداد العشرية وذلك بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة اصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث ان إضافة اصفار على يمين العدد العشري لا يؤثر في قيمة العدد العشري ،وبعدها يتم جمع وطرح الاعداد في الخانات المتناظرة مع الاحتفاظ بموقع الفاصلة العشرية.

مثلاً:

$$\mathbf{2.54 + 3.1392 =}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{2.5400} \\ \underline{+\ \mathbf{3.1392}} \\ \mathbf{5.6792} \end{array} \square$$

مثال 5: احسب ما يلي :

a) $3.125 + 21.32$ b) $6.48 - 2.4$

الحل :

a) $3.125 + 21.32 =$

$$\begin{array}{r} 3.125 \\ \underline{+\quad 21.320} \\ 24.445 \end{array}$$

b) $6.48 - 1.3$

$$\begin{array}{r} 6.48 \\ \underline{-\quad 1.30} \\ 5.18 \end{array}$$

تمرين 5: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $4.3521 + 2.15$

$a)$ 6.5021 $b)$ 6.50 $c)$ 6.5032 $d)$ 6.5

2) $5.79 - 3.1135$

$a)$ 2.6765 $b)$ 2.6775 $c)$ 2.6710 $d)$ 2.8

٢- ضرب الاعداد العشرية:

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ، وعند الانتهاء من عملية الضرب نضع الفاصلة العشرية بحيث تكون عدد الخانات العشرية في ناتج عملية الضرب مساوية لعدد خانات العددين العشريين .

مثلاً :

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times \quad 32 \\ \hline 462 \\ +\ 693 \\ \hline 7392 \end{array}$$

$\boxed{2.31 \times 3.2 =}$

$2.31 \times 3.2 = \mathbf{7.392}$

مثال6 : احسب مايلي :

b) 5.2×4.21 $\square$

$a)\ 3.24 \times 2.1$

الحل:

$a)\ 3.24 \times 2.1 = \mathbf{6.804}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times \quad 21 \\ \hline 324 \\ +\ 648 \\ \hline 6804 \end{array}$$

$a)\ 5.2 \times 4.21 = \mathbf{21.892}$

$$\begin{array}{r} 421 \\ \times \quad 52 \\ \hline 842 \\ +\ 2105 \\ \hline 21892 \end{array}$$

تمرين6: اختر الإجابة الصحيحة :

1) 4.352×2.1

$a)$ 9.1392 $b)$ 91.383 $c)$ 913.54 $d)$ 9139.1

2) 5.7×3.11

$a)$ 1.7727 $b)$ 177.27 $c)$ 1772.7 $d)$ 17.727

٣- قسمة الاعداد العشرية:

لقسمة الاعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما اصبح اقل من المقسوم عليه .

مثلاً $21.566 \div 6.8$

نوحد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة

$$21566 \div 6800$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3.17 \\ \hline
6800 & 21556 \\
 & -\ 20400\square \\ \hline
 & 11560 \\
 & -\ 6800 \\ \hline
 & 47600 \\
 & -\ 47600 \\ \hline
 & 00000
\end{array}$$

تمرين7**:** اختر الإجابة الصحيحة :

1) $151.34 \div 65.8$

$a)$ 5.3 $b)$ 2.3 $c)$ 6.3 $d)$ 8.3

2) $13.392 \div 3.1$

$a)$ 5.32 $b)$ 8.32 $c)$ 1.32 $d)$ 4.32

3.2 تقريب عدد عشري

عند تقريب عدد عشري يُنظر إلى الرقم أو الجزء العشري التي تقع إلى اليمين من الرقم أو الجزء العشري المراد التقريب إليها :

١) إذا كان الرقم أقل من او يساوي 4 يبقى الرقم المراد التقريب اليه ولا يتغير
٢) إذا كان الرقم اكبر من او يساوي 5 يُضاف واحد إلى الرقم الذي يقع في الجزء العشري المراد التقريب إليه.
٣) عند الانتهاء من عملية التقريب نحذف جميع الاعداد العشرية التي يمين العدد العشري المراد تقريبه.

مثال 7 : قرب الاعداد العشرية التاليه الى عدد صحيح و جزء من عشره – جزء من مائة – جزء من الف :

العدد العشري	عدد صحيح	جزء من عشره	جزء من مئة	جزء من ألف
3.62685	**4**	**3.6**	**3.63**	**3.627**
16.25217	**16**	**16.3**	**16.25**	**16.252**
8.5619	**9**	**8.7**	**8.56**	**8.562**

تمرين8: اختر الإجابة الصحيحة :

1) تقريب 3.52681 الى عدد صحيح
$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ 6

2) تقريب 3.52681 الى جزء من عشره
$a)$ 3.2 $b)$ 3.5 $c)$ 3.52 $d)$ 3.62681

3) تقريب 3.52681 الى جزء من مئة
$a)$ 3.5 $b)$ 3.53 $c)$ 3.52 $d)$ 3.52681

4) تقريب 3.52681 الى جزء من الف
$a)$ 3.52 $b)$ 3.526 $c)$ 3.527 $d)$ 3.52781

خصائص الاعداد الحقيقية:

اذا كان $a, b, c \in R$ فان :

الخاصية	الجمع	الضرب
١- الابدال	$a + b = b + a$ $3 + 5 = 5 + 3$	$a \cdot b = b \cdot a$ $2 \times 4 = 4 \times 2$
٢- التجميع	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(2 + 4) + 3 = 2 + (4 + 3)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$
٣- العنصر المحايد	$a + 0 = 0 + a$ $2 + 0 = 0 + 2$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a$ $5 \times 1 = 1 \times 5$
٤- النظير	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ $7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \;, a \neq 0$ $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$
٥- التوزيع	$(b + c)a = ba + ca$,	$a(b + c) = ab + ac$

ملاحظة:

١- الصفر هو العنصر المحايد الجمعي.

٢- الواحد هو العنصر المحايد الضربي.

مثال8 : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد 5 ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد 5 هو -5 لان $5 - 5 = 0$

النظير الضربي للعدد 5 هو $\frac{1}{5}$ لان $5 \times \frac{1}{5} = 1$

ملاحظة : $5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 1}{1 \times 5} = \frac{5}{5} = 1$

مثال9 : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $\frac{2}{3}$ ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$ لان $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

النظير الضربي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ لان $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$

تمرين9: اختر الإجابة الصحيحة:

1) النظير الجمعي للعدد -8

$a)\ 8$ $b)\ -8$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

2) النظير الضربي للعدد -8

$a)\ 8$ $b)\ -8$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

4.2 العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:

ترتيب العمليات

1) احسب كل القوى و الجذور.
2) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.
3) أجر عملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.

ملاحظات مهمة :

1ـ إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس.

2ـ أجر العمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر كلاً على حده.

مثال 10 : احسب ما يلي:

$a)\ \ 6+3-1$ $\qquad b)\ \ 3-(-2)$ $\qquad c)\ \ 4-(5-1)$ $\qquad d)\ \ 3+2.5$

$e)\ \dfrac{5-3+1}{3(2+5)}$ $\qquad f)\ 2(5+\dfrac{3}{5})$

الحل :

$a)\ \ 6+3-1\ \ =9-1=8$

$b)\ \ 3-(-2)=3+2=5$

$c)\ \ 4-(5-1)=4-(4)=4-4=0$

$d)\ \ 3+2.5=5.5$

$$e)\ \frac{5-3+1}{3(2+5)}=\frac{3}{3(7)}=\frac{3}{21}$$

$$f)\ 2\left(5+\frac{3}{5}\right)=2\left(\frac{5}{1}+\frac{3}{5}\right)=2\left(\frac{5\times 5+3\times 1}{1\times\ 5}\right)=2\left(\frac{25+3}{5}\right)=2\left(\frac{28}{5}\right)$$
$$=\frac{2\times 28}{5}=\frac{56}{5}$$

تمرين10: اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\quad 7+4-2=$

$a)\ \ 9$ $\qquad b)\ \ 4$ $\qquad c)\ \ \dfrac{1}{8}$ $\qquad d)\ \ -\dfrac{1}{8}$

2) $\quad 2(3-1)=$

$a)\ \ 9$ $\qquad b)\ \ 4$ $\qquad c)\ \ \dfrac{1}{8}$ $\qquad d)\ \ -\dfrac{1}{8}$

3) $\quad 3.1+2.25=$

$a)\ \ 5.25$ $\qquad b)\ \ 5.35$ $\qquad c)\ 6.25$ $\qquad d)\ \ 3.25$

4) $\quad \dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4})=$

$a)\ \dfrac{8}{12}$ $\qquad b)\ \dfrac{2}{3}$ $\qquad c)\ \dfrac{4}{4}$ $\qquad d)\ \dfrac{3}{3}$

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{5} =$

$a)\ \frac{15}{25}$ $b)\ \frac{15}{10}$ $c)\ \frac{8}{36}$ $d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{-2}{5} \times \frac{6}{6} =$

$a)\ \frac{-28}{40}$ $b)\ \frac{-12}{30}$ $c)\ \frac{-12}{11}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-3}{4} \times \frac{-2}{3} =$

$a)\ \frac{10}{24}$ $b)\ \frac{-10}{24}$ $c)\ \frac{6}{12}$ $d)\ \frac{-5}{12}$

4) $\frac{5}{5} \div \frac{3}{5} =$

$a)\ \frac{30}{18}$ $b)\ \frac{15}{25}$ $c)\ \frac{25}{15}$ $d)\ \frac{8}{12}$

5) $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{4} =$

$a)\ \frac{-32}{20}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{-16}{15}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

6) $\frac{-2}{9} \div \frac{-1}{4} =$

$a)\ \frac{20}{12}$ $b)\ \frac{-8}{9}$ $c)\ \frac{8}{9}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

7) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$

$a)\ \frac{3}{25}$ $b)\ \frac{3}{5}$ $c)\ \frac{3}{10}$ $d)\ \frac{8}{12}$

8) $\frac{1}{9} - \frac{6}{9} =$

$a)\ \frac{-3}{8}$ $b)\ \frac{-5}{9}$ $c)\ \frac{6}{81}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

9) $\frac{-4}{6} - \frac{1}{6} =$

$a)\ \frac{-5}{6}$ $b)\ \frac{4}{36}$ $c)\ \frac{7}{24}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

10) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} =$

$a)\ \frac{2}{7}$ $b)\ \frac{3}{12}$ $c)\ \frac{3}{7}$ $d)\ \frac{10}{12}$

11) $\frac{1}{4} - \frac{4}{5} =$

$a)\ \frac{-3}{18}$ $b)\ \frac{-11}{20}$ $c)\ \frac{3}{20}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

12) $32.154 + 4.23$

$a)\ 34.384$ $b)\ 36.384$ $c)\ 35.897$ $d)\ 36$

13) $5.89 - 3.24$

$a)\ 2.6765$ $b)\ 2.85$ $c)\ 2.98$ $d)\ 2.65$

14) 5.2×3.4

$a)\ 11.2$ $b)\ 17.68$ $c)\ 15.89$ $d)\ 22.78$

15) 3.2×1.2

$a)\ 3.84$ $b)\ 3.2$ $c)\ 1.2$ $d)\ 3$

16) $48.672 \div 15.21$

$a)\ 5.3$ $b)\ 3.2$ $c)\ 2.3$ $d)\ 4.3$

17) $31.671 \div 5.1$

$a)\ 6.21$ $b)\ 5.9$ $c)\ 6.99$ $d)\ 5.32$

18) تقريب 5.62681 الى عدد صحيح

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

19) تقريب 4.501 الى جزء من عشره

$a)$ 4.6 $b)$ 4.5 $c)$ 4 $d)$ 4.501

20) تقريب 2.6315 الى جزء من مائة

$a)$ 2.63 $b)$ 2.64 $c)$ 2.631 $d)$ 2

21) النظير الجمعي للعدد -7 هو

$a)\ 7$ $b)\ -7$ $c)\ \frac{1}{7}$ $d)\ -\frac{1}{7}$

22) النظير الضربي للعدد -2 هو

$a)\ 2$ $b)\ -2$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ -\frac{1}{2}$

23) $5 + 3 - 1 =$

$a)\ 7$ $b)\ 4$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

24) $4(2 - 5) =$

$a)\ 9$ $b)\ -12$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

25) $1.12 + 8.26 =$

$a)$ 5.25 $b)$ 5.35 $c)$ 9.38 $d)$ 3.25

26) $\frac{3}{5}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) =$

$a)\ \frac{8}{12}$ $b)\ \frac{2}{3}$ $c)\ \frac{9}{20}$ $d)\ \frac{3}{3}$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه

يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة

بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.

م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
٧					
٨					
٩					
١٠					
١١					
١٢					

يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.

<table>
<tr><td colspan="6">نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب
يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">اسم المتدرب : ....</td><td colspan="4">التاريخ:
...................................</td></tr>
<tr><td colspan="2">رقم المتدرب : ....</td><td colspan="4">المحاولة : ☐ ☐ ☐ ☐
العلامة : ....</td></tr>
<tr><td colspan="6">كل بند أو مفردة يقيم بـ ☐☐ نقاط
الحد الأدنى: ما يعادل ☐☐٪ من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل ☐☐☐٪ من مجموع النقاط.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">م</td><td rowspan="2">بنود التقييم</td><td colspan="4">النقاط (حسب رقم المحاولات)</td></tr>
<tr><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>٧</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٨</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٩</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>١٠</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>١١</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>١٢</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">المجموع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">ملحوظات:
....
توقيع المدرب: ....</td></tr>
</table>

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. إجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود.

٢. تحليل كثيرات الحدود.

٣. حساب الكسور الجبرية واختصارها.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 14 ساعات تدريبية.

كثيرات الحدود

1.3 كثيرات الحدود:

تعريف 1:

الحد الجبري يكون إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال1: ماهو معامل الحد الجبري $-2x^3y$

الحل:

معامل الحد الجبري هو -2 ودرجته تساوي 4 لان $(3+1=4)$

الحدود المتشابهة:

هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيها الأس).

مثلاُ: $6x^2$ و $4x^2$ حدان متشابهان

$-2x^3$ و $5x^3$ حدان متشابهان

ولكن الحد $3x^2$ لا يشبه الحد $5x$

وكذلك $2x^3$ و $2y^3$ غير متشابهان.

ملاحظة: درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر $(4x^0 = 4)$

تعريف 2:

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها.

الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x

إذا كانت n عدد صحيح غير سالب فإن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن كتابتها على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \qquad , a_n \neq 0$$

مثال 2: الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود :

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعامل الرئيسي	الحد الثابت	المعاملات
$\mathbf{4x^2 - 3x + 1}$	$4x^2, -3x, 1$	2	4	1	$4, -3, 2, 1$
$\mathbf{x^3 - 2}$	$x^3, -2$	3	1	-2	$1, -2$
$\mathbf{3x^4 - 2x^3}$	$3x^4, -2x^3$	4	3	0	$3, -2$

تمرين 1 : اختر الإجابة الصحيحة :

١) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1   b) 2   c) 3   d) 4

٢) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1 $b)$ 2 $c)$ 3 $d)$ 4

٣) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2.3 العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

جمع وطرح كثيرات الحدود :

عند جمع او طرح كثيرتي حدود فإننا نجمع او نطرح معاملات الحدود المتشابهة.

مثلاً : $(3x + 5) + (x - 2) = 3x + x + 5 - 2 = 4x + 3$

$$(3x + 5) - (x - 2) = 3x - x + 5 - (-2) = 2x + 7$$

مثال3: اختصر كل من التالي :

$a)\ (2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2)$

$b)\ (3x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 3)$

$c)\ (x^2 + 4x - 1) + (5x^2 + x)$

الحل :

$$a)\ (2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2) = 2x^2 + x^2 + 3x - x + 5 + 2$$
$$= 3x^2 + 2x + 7$$

$$b)\ (3x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 3) = 3x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 3$$
$$= 3x^2 - 2x^2 - 5x - 3x + 6 + 3$$
$$= x^2 - 8x + 9$$

$$c)\ (x^2 + 4x - 1) + (5x^2 + x) = x^2 + 5x^2 + 4x + x - 1$$
$$= 6x^2 + 5x - 1$$

تمرين2 : اختر الاجابه الصحيحه

١) $(5x + 3) + (2x - 1) =$

$a)$ $7x + 3$ $b)$ $3x - 1$ $c)$ $7x + 2$ $d)$ $3x + 2$

$(5x+3)-(2x-1) =$ (٢

$a)\quad 3x-4 \qquad b)\quad 3x-2 \qquad c)\quad 3x+4 \qquad d)\quad 3x+2$

ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي :

تعريف: عند ضرب عدد حقيقي k في كثيرة حدود من الدرجة n فإننا نضرب العدد الحقيقي في جميع معاملات كثيرة الحدود (خاصية التوزيع):

$$k(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0)$$
$$= ka_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ka_1x^1 + ka_0$$

مثال 4: اختصر مايلي :

$$a)\ 3(2x^2 + 4x \quad -1)$$
$$b) -2(5x \quad -3)$$

الحل :

$$a)\quad 3(2x^2 - 4x + 1) = (3\cdot 2)x^2 + (3)(-4)x + (3\cdot 1)$$
$$= 6x^2 - 12x + 3$$

$$b)\quad -2\,(5x-3) = (-2)\ (5)x + (-2)\cdot(-3)$$
$$= -10x + 6$$

تمرين 3: اختر الإجابة الصحيحه :

1) $5(3x^2 + 2x - 4) =$

$a)\ 15x^2 + 10x - 20 \qquad b)\ 15x^2 + 7x + 20$

$c)\ 8x^2 - 7x + 9 \qquad d)\ x^2 + 10x - 20$

2) $-3(x^2 - 4x) =$

$a)\ -3x^2 + 12x \qquad b)\ -3x^2 + x$

$c)\ x^2 + 12x$ $d)\ -3x^2 - 12x$

ضرب كثيرات الحدود:

<u>خصائص الأسس :</u> اذا كان x, y عددين حقيقيين و m, n عددين صحيحين فان:

الخاصية	مثال
1) $x^0 = 1 \quad , x \neq 0$	$8^0 = 1$
2) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$ $3 \cdot 3^2 = 3^{1+2} = 3^3 = 27$
3) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad , x \neq 0$	$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$ $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$
4) $x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad , \frac{1}{x^{-m}} = x^m \quad x \neq 0$	$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad , \frac{1}{x^{-2}} = x^2$
5) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$ $(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$
6) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	$(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$
7) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m} \quad , x \neq 0 \ , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \frac{y^5}{x^5}$

تعريف : عند ضرب كثيرتي حدود فإننا نقوم بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني، وبعد ذلك نجمع الحدود المتشابهة إذا أمكن.

مثال5 : اوجد حاصل ضرب كثيرتي الحدود التالية واكتب الناتج في ابسط صوره اذا امكن :

$$a)\quad (2x^2+3)\,(4x+5)\square$$

$$b)\quad (x+3)\,(x-2)\square$$

الحل :

$a)\quad (2x^2+3)\,(4x+5)\square$

$= 2x^2(4x+5)\ +3\,(4x+5)$

$= 2x^2(4x)+2x^2(5)+3\,(4x)\ +3\,(5)$

$= 8x^3+10x^2\ +12x+15\square$

$b)\quad (x-2)\,(x+1)\square$

$= x(x+1)\ -2(x+1)\square$

$= x(x)+x(1)\ -2(x)-2(+1)\square$

$= x^2+x-2x-2\square$

$= x^2-x-2\square$

تمرين4: اختر الإجابة الصحيحه :

1) $(x^2+4)\,(2x-2) =$

$a)\ 2x^3-2x^2+8x-8$ $\qquad b)\ 2x^3-x^2+8x-8$

$c)\ 2x^3-2x^2+x-8$ $\qquad d)\ 2x^3-2x^2+8x-2$

2) $(3x+1)\,(x+4)\square$

$a)\ 3x^2+13x+4$ $\qquad b)\ 3x^2+12x+4$

$c)\ 3x^2+x+4$ $\qquad d)\ 3x^2+13x+1$

بعض القوانين المشهورة :

1) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$	$(x+3)(x-3)=x^2-3^2$
2) $(x+y)^2=(x+y)(x+y)$ $=x^2+2xy+y^2$	$(x+5)^2=(x+5)(x+5)$ $=x^2+2\cdot5x+5^2$ $=x^2+10x+25$
3) $(x-y)^2=(x-y)(x-y)$ $=x^2-2xy+y^2$	$(x-5)^2=(x-5)(x-5)$ $=x^2-2\cdot5x+5^2$ $=x^2-10x+25$
4) $(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$ $=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	$(x+5)^3=(x+5)(x+5)(x+5)$ $=x^3+3x^2\cdot5+3x\cdot5^2+5^3$ $=x^3+15x^2+75x+125$
4) $(x-y)^3=(x-y)(x-y)(x-y)$ $=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$	$(x-5)^3=(x-5)(x-5)(x+5)$ $=x^3+3x^2(-5)+3x(-5)^2+(-5)$ $=x^3-15x^2+75x-125$

حساب كثيرة حدود عند قيمة معينة :

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة.

مثال6**:** احسب قيمة كثيرة الحدود عند قيم المتغير x المعطاة:

كثيرة الحدود	قيم x	الحل
x^2+4x-1	$x=0$	$(0)^2+4(0)-1=0+0-1=-1$
$4x^3+2$	$x=1$	$4(1)^3+2=4(1)+2=4+2=6$
$2x-3$	$x=2$	$2(2)-3=4-3=1$
$3x^2-1$	$x=-3$	$3(-3)^2-1=3(9)-1=27-1=26$

تمرين5: اختر الإجابة الصحيحه :

1 - قيمة $2x + 4$ عند $x = 3$

$a)\ 8 \qquad b)\ 10 \quad c)\ 6 \quad d)\ 4$

1 - قيمة $2x^2 + 1$ عند $x = -1$

$a)\ 3 \qquad b)\ 5 \quad c) -3 \quad d) -1$

قسمة كثيرات الحدود :

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى تشبه عملية القسمة المطولة في الاعداد الصحيحة

مثال7 : اوجد حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 1 \\ \hline 2x + 2 & 6x^2 + 8x + 2 \\ & 6x^2 + 6x \\ \hline & \quad 2x + 2 \\ & \quad 2x + 2 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

تمرين6: اختر الإجابة الصحيحه :

1) $(2x^2 + 11x + 12) \div (2x + 3) =$

$a)\ x + 4 \qquad b)\ 2x + 4 \qquad c)\ 2x \qquad d)\ x - 4$

3.3 تحليل كثيرات الحدود

يستخدم التحليل لحل المعادلات الجبرية عادة، وهو يعني كتابة كثيرة الحدود على شكل حاصل ضرب كثيرتي حدود أو أكثر تقل درجتهما عن درجة كثيرة الحدود الأصلية، ويُطلق على كل كثيرة حدود ناتج من عملية التحليل اسم العامل، ولا يمكن تحليل أي عامل من هذه العوامل أبداً، كما يساوي حاصل ضرب جميع العوامل كثيرة الحدود الأصلية دائماً.

طريقة العامل المشترك الأكبر:

تم التحليل من خلال هذه الطريقة باستخراج الثوابت أو المتغيرات المشتركة بين جميع الحدود لتكوّن هذه الثوابت والمتغيرات حدّاً يُعرف بالعامل المشترك الأكبر.

مثال8: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر

$a)\ 6x^2+8x^4 \qquad b)\ 3x^7-x^3y^4$

الحل :

$a)\ 6x^2+8x^4$

العامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $8x^4$ و $6x^2$ هو $2x^2$ وبالتالي :

$$6x^2+8x^4=2x^2\left(\frac{6x^2}{2x^2}+\frac{8x^4}{2x^2}\right)=2x^2(\,3+4x^2)$$

$b)\ 3x^7-x^3y^4$

العامل الشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $-x^3y^4$ و$3x^6$ هو x^3 وبالتالي :

$$3x^7-x^3y^4=x^3\left(\frac{3x^7}{x^3}-\frac{x^3y^4}{x^3}\right)=x^3(\,3x^4-y^4)$$

تمرين7: اختر الإجابة الصحيحة التالية :

1) $(2x^2+12x)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 2x\,(x+6) \quad b)\ 2\,(x+6) \quad c)\ 2x\,(x+6x) \quad d)\ x\,(x+6)$

2) $(4x^2y+8xy)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 4xy\,(x+2) \quad b)\ 2xy\,(xy+4) \quad c)\ 4y\,(x+8x) \quad d)\ xy\,(x+8y)$

تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية :

تحليل فرق مربعين :

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

مثال9: حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\quad x^2 - 16 \qquad b)\quad y^2 - 4 \qquad c)\ 9 - x^2$

الحل:

$a)\quad x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$
$b)\quad y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2)$
$c)\quad 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$

تمرين8: اختر الإجابة الصحيحة التالية:

1) $x^2 - 25$
a) $(x - 5)(x + 5)$ b) $(x - 4)(x + 4)$
c) $(x - 25)(x + 1)$ d) $(5 - x)(5 + x)$

2) $x^2 - 1$
a) $(x - 1)(x + 2)$ b) $(x - 1)(x + 1)$
c) $(x - 2)(x + 1)$ d) $(1 - x)(1 + x)$

3) $81 - x^2$
a) $(x - 81)(x + 1)$ b) $(x - 9)(x + 9)$
c) $(9 - x)(9 + x)$ d) $(81 - x)(1 + x)$

تحليل كثيرة حدود على الصورة $ax^2 + bx + c$

<u>الحالة الأولى:</u> $a = 1$

في هذه الحالة يجب ان نوجد كثيرتي حدود بحيث يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b

مثال10: حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\quad x^2 + 5x + 6 \qquad b)\quad x^2 - 6x + 8 \qquad c)\ x^2 + x - 12$

الحل :

$a)\quad \boldsymbol{x^2+5x+6}$ ☐

في هذه الحاله نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 6 ومجموعهما الجبري يساوي 5

العددين هما 2 و 3

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

$b)\quad \boldsymbol{x^2-6x+8}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 8 ومجموعهما الجبري يساوي -6

العددين هما -2 و -4

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$c)\ \boldsymbol{x^2+x-12}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -12 ومجموعهما الجبري يساوي $+1$

العددين هما 4 و -3

$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

تمرين9: اختر الإجابة الصحيحة التالية:

1) $(x^2+7x+10)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+2)(x+5)$ $b)\ (x+1)(x+10)$

$c)\ (x-2)(x-5)$ $d)\ (x+2)(x-5)$

2) $(x^2-8x+15)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+3)(x+5)$ $b)\ (x-3)(x-5)$

$c)\ (x+3)(x-5)$ $d)\ (x-3)(x+5)$

3) $(x^2-4x-12)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (x+2)(x+6)$ $b)\ (x-2)(x-6)$

$c)\ (x+2)(x-6)$ $d)\ (x+2)(x-5)$

الحالة الثانية: $a\neq 1$

في هذه الحاله نبحث عن أربعة اعداد صحيحة $m\ ,n\ ,p\ ,q$ *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = a$ 2) $pq = c$ 3) $mq + np = b$

وعند إيجاد هذه الاعداد يكون التحليل كما يلي :

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع ملاحظة ان إشارة العددين q و p تكون نفس إشارة العدد b اذا كان $c > 0$ ومختلفتان اذا كان $c < 0$ يتم اختيار العددين n و m على أساس الشرط الأول ويتم اختيار العددين q و p على أساس الشرط الثاني ثم نستخدم الشرط الثالث للتاكد من صحة الاعداد m , n , p , q

مثال11**:** حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ \ 3x^2 + 5x + 2$ $b)\ 10\,x^2 - 27x + 5$

الحل :

$a)\ \ \mathbf{3x^2 + 5x + 2}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m , n , p , q *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = 3$ 2) $pq = 2$ 3) $mq + np = 5$

$$3x^2 + 5x + 2 = (3x + 2)(x + 1)$$

$b)\ \ \mathbf{10\,x^2 - 27x + 5}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m , n , p , q *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = 10$ 2) $pq = 5$ 3) $mq + np = -27$

$$10\,x^2 - 27x + 5 = (2x - 5)(5x - 1)$$

تمرين10**:** اختر الإجابة الصحيحة التالية :

1) $(8x^2 - 2x - 15)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (2x-3)(4x+5)$ $b)\ (2x+3)(4x-5)$
$c)\ (2x-2)(4x-4)$ $d)\ (2x+3)(4x+5)$

2) $(8x^2+2x-3)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ (4x+3)(2x-1)$ $b)\ (4x+2)(2x-4)$
$c)\ (4x-3)(2x-1)$ $d)\ (4x-2)(2x+4)$

4.3 الكسور الجبريه :

الكسر الجبري هو عبارة عن قسمة كثيرتي حدود ، ويعامل الكسر الجبري كما تعاملنا مع الكسور النسبيه في الوحدة السابقة.

اختصار الكسور الجبريه :

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف الحدود المشتركه في البسط والمقام ، فان عملية الاختصار تتطلب منا الادراك الجيد بعمليات التحليل التي سبق دراستها في هذه الوحدة.

مثال12 : اختصر مايلي :

$a)\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ $b)\ \dfrac{x+4}{x^2+2x-8}$

$c)\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x-1}{x-2}$ □

الحل : نقوم بتحليل البسط والمقام اذا امكن وبعدها نحذف الحدود المشتركه

$$a)\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+2)}{(x-3)}$$ □

$$b)\ \frac{x+4}{x^2+2x-8}=\frac{x+4}{(x+4)(x-2)}$$

$$c)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x^2-5x+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(x-2)}$$ □

$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}$$ □

تمرين11 : اختر الإجابة الصحيحه :

1) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+9+20}$

a) $\dfrac{x+2}{x+4}$ b) $\dfrac{x-2}{x-4}$ c) $\dfrac{x+10}{x+20}$ d) $\dfrac{x-10}{x-20}$

2) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+8x+15}$

a) $\dfrac{x+2}{x+4}$ b) $\dfrac{x-7}{x+5}$ c) $\dfrac{x+10}{x+20}$ d) $\dfrac{x-10}{x-20}$

3) $\dfrac{x^2+12x+7}{x^2-9} \div \dfrac{x+4}{x+3}$

a) $\dfrac{x+3}{x-3}$ b) $\dfrac{x+4}{x-4}$ c) $\dfrac{x+7}{x-7}$ d) $\dfrac{x+12}{x-9}$□

تمارين

١) درجة كثيرة الحدود التالية $\mathbf{4x^2 - 5x + 3}$

a) 1 b) 2 c) **3** d) 4

٢) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $\mathbf{4x^2 - 5x + 3}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

٣) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $\mathbf{4x^2 - 5x + 3}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

٤) ناتج $(\mathbf{5x + 3}) + (\mathbf{2x - 1})$

a) $7x + 3$ b) $3x - 1$ c) $7x + 2$ d) $3x + 2$

٥) ناتج $(\mathbf{5x + 3}) - (\mathbf{2x - 1})$

a) $3x - 4$ b) $3x - 2$ c) $3x + 4$ d) $3x + 2$

٦) ناتج $3\ (5x - 2)$

a) $15x - 2$ b) $15x - 6$ c) $15x + 6$ d) $15x - 3$

٧) ناتج $(3x^2 + 2)\ (2x + 1)$

a) $6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ b) $6x^3 + 3x^2 + 2$ c) $3x^2 + 4x + 2$ d) $6x^3 + 2$

٨) حساب قيمة كثيرة الحدود $2x + 1$ عند القيمة $x = 2$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

٩) حساب قيمة كثيرة الحدود $3x - 2$ عند القيمة $x = -2$

a) 2 b) 3 c) 4 d) -8

١٠) ناتج $(x - 3)\ (x + 2)$

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - 5x - 6$ c) $x^2 - x - 2$ d) $2x^2 - 2x - 2$

١١) حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$

a) $2x + 2$ b) $x + 1$ c) $x + 3$ d) $3x + 1$

١٢) حاصل قسمة $4x^2 + 11x + 6$ على $4x + 3$

$3x + 3$ □ $x + 4$ □ $x + 2$ □ $4x + 2$ □

١٣) تحليل كثيرة الحدود $3x^5 + 6x^2$

a) $3x^2(x^3+2)$ b) $x^2(x^3+3)$ c) $3x(x+2)$ d) $3(x^3+2)$

١٤) تحليل كثرة الحدود = x^2-9

a) $(x+3)(x+3)$ b) $(x-3)(x-3)$ c) $(x+3)(x-3)$ d) $(x+9)(x+1)$

١٥) تحليل كثرة الحدود = x^2+6x+8

a) $(x+2)(x+4)$ b) $(x-2)(x-4)$ c) $(x-2)(x+4)$ d) $(x+2)(x-4)$

١٦) تحليل كثرة الحدود = $x^2-7x+10$

a) $(x-2)(x-5)$ b) $(x-2)(x+5)$ c) $(x+2)(x+5)$ d) $(x+2)(x-5)$

١٧) تحليل كثرة الحدود = x^2+x-6

a) $(x-2)(x-3)$ b) $(x+2)(x-3)$ c) $(x+2)(x+3)$ d) $(x-2)(x+3)$

١٨) تحليل كثرة الحدود = $x^2-3x-10$

a) $(x-5)(x+2)$ b) $(x-5)(x-2)$ c) $(x+5)(x-2)$ d) $(x-5)(x+2)$

١٩) تحليل كثرة الحدود = $6x^2+17x+12$

a) $(2x+2)(x+4)$ b) $(2x+3)(3x+4)$ b) $(x+3)(x+4)$ c) $(x+2)(x+3)$

٢٠) تحليل كثرة الحدود = $2x^2+7x+3$

a) $(x+3)(2x+1)$ b) $(x+3)(x+1)$ c) $(x+2)(2x+3)$ d) $(3x+3)(2x+3)$

٢١) اختصار $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$

a) $\frac{(x-4)}{(x-4)}$ b) $\frac{(x+4)}{(x-4)}$ c) $\frac{(x+2)}{(x-4)}$ d) $\frac{(x+6)}{(x-4)}$

٢٢) اختصار $\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$

a) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$ b) $\frac{(x-3)}{(x-5)}$ c) $\frac{(x-5)}{(x-3)}$ d) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
١٣					
١٤					
١٥					
١٦					
١٧					
١٨					
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: ....
رقم المتدرب :	المحاولة : ☐ ☐ ☐ ☐ العلامة : ....
كل بند أو مفردة يقيم بـ ☐☐ نقاط الحد الأدنى: ما يعادل ☐☐٪ من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل ☐☐☐٪ من مجموع النقاط.	

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		☐	☐	☐	☐
١٣					
١٤					
١٥					
١٦					
١٧					
١٨					
المجموع					

ملحوظات:
....

توقيع المدرب: ....

الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات

الوحدة الرابعة

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المصفوفات والمحددات والقدرة على أداء العمليات على المصفوفات وحساب المحددات.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. أداء العمليات على المصفوفات.

٢. حساب المحددات.

٣. حساب مقلوب مصفوفة.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12ساعات تدريبية.

المصفوفات

1.4 مفهوم المصفوفة وانواعها:

تعريف المصفوفة: هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة بين [ ] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة ... $A , B , C, D,$ كما في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز m وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز n

رتبة المصفوفة:

رتبة المصفوفة $A =$ عدد الصفوف $m \times$ عدد الاعمدة n

رتبة المصفوفة $A = m \times n$

مثلاً :

$$\begin{array}{cccc} & \text{عمود 1} & \text{عمود 2} & \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} & & \begin{array}{l} \leftarrow \text{صف 1} \\ \leftarrow \text{صف 2} \\ \leftarrow \text{صف 3} \end{array} \end{array}$$

رتبة المصفوفة $A = 3 \times 2$

ملاحظة: قيمة العنصر a_{31} يساوي 5

مثال1: أوجد رتب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$

رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$□

رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$□

رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

تمرين 1: اختر الإجابة الصحيحة:

1- رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3×2□ b) 2×3□ c) 3×3 d) 2×2

2- قيمة العنصر b_{22} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3 b) 2 c) −3 d) 0

3- رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) 2×2 c) 3×2 b) 3×1 a) 2×3

4- قيمة العنصر a_{22} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) 0 c) 1 b) -1 a) 3

أنواع المصفوفات :

١- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

٢- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

3- **المصفوفة المربعة** : هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

4- **المصفوفة الصفرية** : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٥- **المصفوفة القطرية**: هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي

القطر الرئيسي

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{5} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{4} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

6- **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$

مثلاً: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال 2**:** حدد نوع المصفوفات التالية :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوع المصفوفة A : مصفوفة عمودية .

نوع المصفوفة B : مصفوفة الوحدة I_3 .

نوع المصفوفة C : مصفوفة قطرية .

تمرين2**:** اختر الإجابة الصحيحة:

١- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

☐ عمودية $d)$ صفية $c)$ صفرية $b)$ مربعة $a)$

٢- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$

☐ عمودية $d)$ صفية $c)$ صفرية $b)$ مربعة $a)$

٣- مصفوفة الوحدة

☐ $d)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

١- إذا كانتا من نفس الرتبة.

٢- عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

مثال3: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$ ☐

الحل: نعم، المصفوفة A تساوى المصفوفة B لان لهما نفس الرتبة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية .

مثال4: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$ ☐

الحل: لا . لأن المصفوفتان A و B غير متساويان لان احد عناصرها المتناظرة غير متساوية ($1 \neq 0$) ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة.

مثال 5**:** أوجد قيمة x التى تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} x & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ ان المصفوفتين A وB لهما نفس الرتبة 2×3 وان جميع عناصرهما المتناظرة

متساوية وبالتالي فان قيمة $x = 1$

تمرين3**:** اختر الإجابة الصحيحة:

١- قيمة x التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$a)\ \ 2 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ \ 3$ ☐

١- قيمة x و y التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix} 2 & x & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & y & 2 \end{bmatrix}$

$a)\ \ x = 4 \ \ ,y = 3 \quad b)\ \ x = 1 \ \ ,y = 2 \quad c)\ \ x = 0 \ \ ,y = 1 \quad d)\ \ x = 3 \ \ ,y = 4$ ☐

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات :

جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$

مثال 6**:** إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد كلا مما يأتي إذا امكن:

$a)\ \ \ A + B \qquad b)\ A - B \qquad c)\ B + C$ ☐

الحل:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+(-2) \\ -2+5 & 1+4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ☐

b) $A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-(-2) \\ -2-5 & 1-4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ ☐

c) $B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

تمرين4: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى ....

a) لا يمكن ☐ b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ ☐ c) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ ☐ d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم العدد على جميع عناصر المصفوفة.

مثلاً
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow k\,\mathrm{A} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$ ☐

مثال7 : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي:

$a)\ 2A$ $\qquad b)\ 2A + B$ $\qquad c)\ \frac{B}{2}$ ☐

الحل:

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$ ☐

$$c)\ \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين5**:** إختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $-4B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -32 & -4 & -12 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{B}{-2}$ تساوى .

a) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, فإن $2\,A + 3\,B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, فإن $2\,A - 3\,B$ تساوى

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا.

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلا

$$[2 \quad 4]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

$$[1 \quad 4 \quad 6]\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$ لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \quad \cdot \quad B_{n\times k}$$

متساوية$(n = n)$

رتبة المصفوفة AB هي

$m \times k$

مثال 8: أوجد رتبة المصفوفة $A \cdot B$:

$a)\quad A_{3\times4} \cdot B_{4\times2} \qquad b)\quad A_{5\times3} \cdot B_{3\times4}$

الحل:

$a)\quad 3 \times 2$

$b)\quad 5 \times 4$

تمرين 6: اختر الإجابة الصحيحة :

١- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين $A_{4\times6} \cdot B_{3\times2}$

$a)\ 4 \times 2$ $\quad b)\ 6 \times 3$ $\quad$ c) 4×3 $\quad$ d) لا يمكن □

٢- رتبة المصفوفة الناتجة $B_{4\times4} \cdot A_{3\times4}$ هى

$a)\ 4 \times 2$ $\quad b)\ 6 \times 3$ $\quad$ c) 3×4 $\quad$ d) لا يمكن □

مثال 9: أوجد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

مثال10 : إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج كل مما يلى :

$a)\ A \cdot B \qquad b)\ B \cdot A \qquad c)\ A \cdot C \qquad d)\ C \cdot B$

الحل:

$$a)\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times (-3) \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 8 + 3 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+8 & 16+(-24) \\ 2+3 & 8+(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

$$b)\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 & 16+24 \\ 2+(-3) & 8+(-9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 6 & 2 \times 0 + 8 \times 1 & 2 \times 4 + 8 \times (-2) \\ 1 \times 2 + 3 \times 6 & 1 \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + 3 \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+48 & 0+8 & 8+(-16) \\ 2+18 & 0+3 & 4+(-6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 8 & -8 \\ 20 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \ C \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوى عدد صفوف المصفوفة B

لاحظ أن :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \neq B \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

أي أن $A \cdot B \neq B \cdot A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

تمرين7**:** اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot \mathrm{B}$ تساوي

$a)\ \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} 34 & -32 \\ 26 & 24 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

٢- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot \mathrm{B}$ تساوي

$a)\ \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$

المــحـددات

3.4 المحددات

إذا كانت A مصفوفة مربعه فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

حساب المحددات 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3)$$

$$= 24 - 15 = 9$$

مثال 11 **:** أوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا امكن:

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$$b)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

تمرين8: اختر الإجابة الصحيحة :

١- محددة $\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ تساوى

d) -7 c) -6 b) 10 a) 22

2- محددة $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ تساوى

d) 45 c) -17 b) لا يمكن   a) -73

حساب المحددات 3×3

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من اعلى الى اسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

مثال 12**:** أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right.$$

$$= ((4 \times 2 \times 1) + (-1 \times 6 \times (-2)) + (3 \times (-3) \times 5))$$

$$- ((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1))$$

$$= (\,8 + 12 + (-45)\,) - (\,(-12) + 120 + 3\,) = \ -25 - \ 111 =$$

$$= \ -136$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136 \square$$

تمرين9**:** اختر الإجابة الصحيحة : $\square$

١- $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ تساوي

$a)\ -60$ $\qquad b)\ -525$ $\qquad c)\ -8$ $\qquad d)\ 60\square$

٢- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوي

$a)\ -174$ $\qquad b)\ 174$ $\qquad c)\ 60$ $\qquad d)\ 45\square$

4.4 مقلوب (معكوس) مصفوفة :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت محددتها لا تساوي الصفر وبالتالي يوجد مقلوب للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} أي أن:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة 2×2 فقط.

نظرية : اذا كانت a, b, c, d اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

مثال 13 : أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما ان $|A| = 0$ اذن لا يمكن ايجاد A^{-1}

$b)\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

أولا نوجد $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2\square$$

بما أن $|B| \neq 0$ أذن يمكن إيجاد B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

تمرين 10: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1}

$a)$ لا يمكن $\quad b)\ \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

٢- اذا كان $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن B^{-1}

$a)$ لا يمكن $\quad b)\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

تمارين

1) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2×1 b) 3×1 c) 2×3 d) 3×2

2) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3×2 b) 2×3 c) 2×1 d) 2×2

3) قيمة a التي تجعل المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ متساوية :

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a = 1$ d) $a = -1$

4) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فان $A + B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

5) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فان $A - B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

6) اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ فان $A \bullet B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

7) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فان $2A$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

8) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $\frac{A}{2}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

9) المصفوفة التي تمثل مصفوفة الوحدة هي .

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12) نرمز لمحددة مصفوفة A بالرمز

a) $\boldsymbol{A^2}$ b) A c) $|A|$ d) $\boldsymbol{A^{-1}}$

13) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 10 b) 7 c) 3 d) 13

14) نوع المصفوفة $B = [\,5 \quad -1\,]$ هي

a) صف☐ b) عمود☐ c) صفرية☐ d) مربعة☐

15) نوع المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ هي

a) صف☐ b) عمود☐ c) صفرية☐ d) مربعة☐

16) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A - B$

a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوي

a) -98☐ b) 98☐ c) 0☐ d) 102☐

18) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوي

a) 18☐ b) 10☐ c) 28☐ d) 0☐

19) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1} تساوي

a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$

20) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \cdot \underline{B}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

21) قيمة العنصر b_{22} فى المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2 □ b) 4 c) 3□ d) 7

22) قيمة العنصر a_{12} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3 b) -2 c) 1 d) 0

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.

م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
١٩					
٢٠					
٢١					
٢٢					
٢٣					
٢٤					

يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.

الوحدة الخامسة

المعادلات

الوحدة الخامسة

المعادلات

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

١. حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية.

٢. حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد.

٣. حل المعادلات الخطية ذات مجهولين.

٤. حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 16 ساعات تدريبية.

المعادلات

تعريف 1:

المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيرتي حدود). وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثلاً المعادلة $2x+1=9$ تكون صحيحة عندما $x=4$ وخاطئة لأية قيمة أخرى ل x

إذن نقول إن $x=4$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 4 تصبح المعادلة $2(4)+1=9$ وهذا صحيح.

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

1.5 **المعادلات الخطية**.

تعريف 2: المعادلة الخطية هي التي تكتب على الصورة $ax+b=0$ حيث a و b اعداد حقيقيه و $a\neq 0$ ويكون الحل العام $x=\frac{-b}{a}$

مثال 1**:** حل المعادلات التأليه:

$$a)\ \ 2x=10 \qquad b)\ \ 3x+2=8 \qquad c)\ 5x+1=\frac{x}{2}+10$$

الحل :

$$a)\ \ 2x=10$$

$$\frac{2}{2}x=\frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x=5$$

$$b)\ \ 3x+2=8$$

$$3x+2=8 \quad \rightarrow \quad 3x=8-2 \quad \rightarrow \quad 3x=6$$

$$x=\frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad x=3$$

$$c)\ 5x + 1 = \frac{x}{2} + 10 \square$$

$$2 \times (5x+1) = 2 \times \left(\frac{x}{2} + 10\right) \quad \rightarrow \quad 10x + 2 = x + 20 \square$$

$$10x - x = 20 - 2 \quad \rightarrow \quad 9x = 18 \quad \rightarrow \quad x = \frac{18}{9} \ \square$$

$$x = 2 \square$$

تمرين1 : اختر الإجابة الصحيحه لحل المعادلات التاليه :

1) $5x - 2 = 18$ $\square$

$a)\ x = 4$ $\qquad b)\ x = -4$ $\qquad c)\ x = 5$ $\qquad d)\ x = -5$

2) $6x + 4 = 2x + 12$ $\square$

$a)\ x = 2$ $\qquad b)\ x = -2$ $\qquad c)\ x = 4$ $\qquad d)\ x = -4$ $\square$

3) $\frac{2x+3}{3} = \frac{x-1}{2} \square$

$a)\ x = 9$ $\qquad b)\ x = -9$ $\qquad c)\ x = 3$ $\qquad d)\ x = -3$ $\square$

2.5 معادلات من الدرجة الثانية:

معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد يمكن كتابتها على الصورة القياسية التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad , \quad a \neq 0$$

ولحلها نستخدم القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثلا :

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

ملاحظة1 : يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة ويرمز له بالرمز Δ (دلتا) وعليه فيمكن كتابة القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وأما دور المميز فهو تحديد عدد جذور (حلول) المعادلة في R كما يوضحه الجدول الآتي:

المميز	عدد الحلول
$\Delta > 0$	حلان حقيقيان
$\Delta = 0$	حل واحد حقيقي
$\Delta < 0$	لا توجد حلول حقيقية

مثال 2 : اوجد حل المعادلات الأتية في R

$a)\ x^2+5x=-6 \qquad b)\ 2x^2-4x+2=0$
$c)\ 3x^2+2x=-1$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2+bx+c=0$:

$$a)\ x^2+5x+6=0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات $a\ ,b\ ,c$:

$$a=1 \qquad ,b=5 \qquad ,c=6$$

ثالثا: نوجد قيمة المميز : $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=5^2-4(1)(6) \quad \Rightarrow \quad \Delta=25-24$$

$$\Delta=1 \qquad ,\Delta=1>0$$

يوجد حلان حقيقيان

رابعا: نعوض باستخدام القانون العام :

$$x=\frac{-b\ \pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\ \pm\sqrt{1}}{2(1)}=\frac{-5\ \pm 1}{2}$$

$$x=\begin{cases} x_1=\dfrac{-5+\ 1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \\ \\ x_2=\dfrac{-5-\ 1}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون الحلان هما : $-3\ ,\ -2$

$$b)\ 2x^2-4x+2=0$$

المعادلة مكتوبه على الصورة القياسية وبالتالي نستطيع الحل باستخدام الخطوات السابقة في الفقرة a او التعويض مباشرة في القانون العام :

$$ax^2+bx+c=0$$
$$2x^2-4x+2=0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{4 \pm 0}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

يوجد حل واحد فقط لان $\Delta = 0$ وبالتالي يكون الحل هو 1

$$c)\ 3x^2 + 2x = -1$$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$:

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات a , b , c :

$$a = 3 \qquad , b = 2 \qquad , c = 1$$

ثالثا : نوجد قيمة المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(1) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8 \qquad , \Delta = -8 < 0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادله لان المميز اقل من الصفر

تمرين2: اختر الإجابة الصحيحه لحل المعادلات التاليه :

1) $x^2+7x=-10$ ☐

$a)\ x=-2\ ,x=\ -5$ $b)\ x=\ 2\ ,\ \ x=5$ $c)$ لايوجد حل $d)\ \ x=4$

2) $x^2+8x+16=0$ ☐

$a)\ x=-3\ \ ,x=\ 4$ $b)\ \ \ x=\ 5$ $c)$ لايوجد حل $d)x=\ -4$ ☐

3) $5x^2+x+2=0$ ☐

$a)\ \ \ x=4$ $b)\ \ \ x=\ 5$ $c)$ لايوجد حل $d)\ x=-4$ ☐

3.5 **حل مجموعة معادلات خطيه**

المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى.

مثلاً:

معادلة خطيه من الدرجة الأولى في متغير واحد $5x+10=0$

معادلة خطيه من الدرجة الثانية في متغيرين $2x+3y=5$

معادلة خطيه من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات $x+2y-5z=1$

تعريف 3.:

جملة المعادلات الخطية هي عباره عن مجموعة من المعادلات الخطية.

1.3.5 **جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :**

لدينا طريقتين لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

- **المعادلات المصفوفية :**

لتمثيل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين يمكن استخدام المصفوفات. فمثلاً

يمكن كتابة معادلة مصفوفيه لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الاتية:

$$A \quad \cdot \quad X \quad = \quad C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المعاملات}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المجاهيل}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الثوابت}}$$

ثم نحل المعادلة المصفوفية بالطريقة التالية:

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

لاحظ ان حل المعادلة المصفوفية من الشكل $AX = B$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2 :

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$

وذلك إذا كانت $|A| \neq 0$

مثال 3: أوجد حل المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 2$$

الحل :

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 2$$
$$A\,x = b$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8-9) = -17$$

حيث أن $\Delta \neq 0$ ، فإن المصفوفة A لها معوكس ضربى

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$x = A^{-1}\,b$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4-6 \\ -3+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$
$$x = \frac{10}{17} \qquad , \qquad y = \frac{-1}{17}$$

مثال 4: أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

الحل :

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$
$$A\,x = b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1) = -2$$

حيث أن $\Delta \neq 0$, فإن المصفوفة A لها معوكس ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$x = A^{-1}\,b$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -5+1 \\ -5-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 3$$

مثال 5: أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$3x + y = 5$$
$$6x + 2y = 1$$

الحل :

$3x + y = 5$

$6x + 2y = 1$

$A\,x = b$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (6-6) = 0$

حيث أن $\Delta = 0$, فإن المصفوفة A ليس لها معوكس ضربى وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة.

تمرين 3: إختر الإجابة الصحيحة :

1) إذا كانت المعادلتين $x + y = 5$, $2x - 7y = 3$, فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x = \frac{38}{9}\ , y = \frac{7}{9}$ $\quad b)\ x = 5\,, y = 3$

$c)\ x = 2\ , y = 7$ $\quad d)\ x = 1\,, y = 1$

2) إذا كانت المعادلتين $x + y = 10$, $x - y = 4$, فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x = 1\,, y = 1$ $\quad b)\ x = 7\,, y = 3$

$c)\ x = 1\ , y = -1$ $\quad d)\ x = 4\,, y = 10$

3) إذا كانت المعادلتين $3x + y = 1$, $x + 2y = 5$, فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

$a)\ x = 3\,, y = 5$ $\quad b)\ x = 2\,, y = 3$

$c)\ x = 1\ , y = 1$ $\quad d)$ لا يوجد حل

- طريقة كرايمر.

ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

بحيث ان المعاملات a_1, a_2, b_1, b_1 والثوابت c_1, c_2 اعداد حقيقية

فان حل جملة المعادلتين:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

حيث ان:

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ،أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

ملاحظة 2 **:**

١- اذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

٢- اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- **<u>الحالة الأولى:</u>** اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل.
- **<u>الحالة الثانية :</u>** اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

مثال 6: حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a)\ \begin{cases} 4x+5y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x+6y=4 \\ x+3y=2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} -2x+y=5 \\ x-0.5y=2 \end{cases}$$

الحل:

$$a)\ \begin{cases} 4x+5y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1)-(1)(5) = 4-5 = -1$$

وبالتالي يوجد حل وحيد لان $D = -1 \neq 0$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1)-(1)(5) = 3-5 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1)-(1)(3) = 4-3 = 1$$

ثالثا: نوجد قيم x و y :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad , \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-1} = -1$$

ملاحظة 3 : للتأكد من الحل نعوض عن قيمة كلا من قيم x و y في جملة المعادلات.

$$b)\ \begin{cases} 2x+6y=4 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (6)(1) = 6 - 6 = 0$$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$$

ثالثا نحسب محدد المجاهيل ل y

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(4) = 4 - 4 = 0$$

بما ان محدد الجملة $(D = 0)$ ومحددات المجاهيل $D_x = D_y = 0$

اذن للجملة عدد لانهائي من الحلول

$$c) \quad \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

أولا : نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = (-2)(-0.5) - (1)(1) = 1 - 1 = 0\square$$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = (5)(-0.5) - (2)(1) = -2.5 - 2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة $(D = 0)$ ومحدد $D_x \neq 0$

اذن الجملة مستحيلة الحل

تمرين4 اختر الإجابة الصحيحه لحل جملة المعادلات التاليه :

$$1) \quad \begin{cases} 3x + 4y = -14 \\ -2x - 3y = 11 \end{cases}$$

□

$a)\ x = 2\ , y = -5$ $\quad b)\ x = -5\ , y = -2$ $\quad c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

2) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

$a)\ x = 2\ , y = 0$ $\quad b)\ x = 1\ , y = 3$ $\quad c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

3) $\begin{cases} 7x + 3y = 27 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$

$a)\ x = 3\ , y = 2$ $\quad b)\ x = 2\ , y = 3$ $\quad c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي

2.3.5 جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل :

تعريف 4 : ليكن لدينا جملة ثلاث معادلات خطية ذات المجاهيل x و y و z على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

فان حل هذه الجملة :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} \quad , \quad z = \frac{D_z}{D}$$

بحيث ان المعاملات $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, , c_3$ والثوابت d_1, d_2, d_3 اعداد حقيقية

حيث :

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان :

$$D = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ،أي ان :

$$D_x = \left| \begin{array}{ccc} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{array}$$

$$D_y = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{array} \square$$

$$D_z = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \square$$

ملاحظة 4 :

١- اذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} \quad , \quad z = \frac{D_z}{D}$$

٢- اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- الحالة الأولى: اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل
- الحالة الثانية : اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

مثال7 : حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x-y+2z=12 \end{cases}$$

الحل:

$$a)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة D :

$$D=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{array} = 6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y و D_z :

$$D_x=\left|\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{array} = 36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{array} = 22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{array} = 39+33+24-54-22-26=-6$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-2}=1 \quad , \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$b)\quad \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x-y+2z=12 \end{cases} \square$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right. = 2+6-2-3-1-(-8)=10\neq 0$$

$$D_x=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 12 & -1 & 2 & 12 & -1 \end{array}\right. = 6+24-5-12-3-(-20)=30\square$$

$$D_y=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 12 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right. = 10-9+24-15-(-12)-12=10\square$$

$$D_z=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 12 & 3 & -1 \end{array}\right. = 12-30-6-9-(-5)-(-48)=20\square$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{30}{10}=3 \quad , \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{10}{10}=1 \quad \square$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{20}{10}=2\square$$

تمرين5: اختر الإجابة الصحيحه لحل جملة المعادلات التاليه :

$$1)\quad \begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 3x+y-4z=-6 \\ 2x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$\square$

$a)\ x=-2\ ,y=4,z=1 \qquad b)\ x=-2\ ,y=4,z=-1$

$c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$عدد لانهائي$\square$

1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 17 \\ 3x + 2y + z = 11 \\ x - 5y + z = -5 \end{cases}$

□

$a)\ x = 1\ , y = 2, z = 4$ $\quad b)\ x = -1\ , y = 3, z = -4$

$c)$ مستحيلة الحل $\quad d)$ عدد لانهائي□

تمارين

١) حل المعادلة التالية $2x - 10 = 0$

a) $x = 2$ b) $x = 5$ c) $x = 6$ d) $x = 4$

٢) حل المعادلة التالية $3x = x + 2$

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

٣) حل المعادلة التالية $\boldsymbol{x} - 4 = 9$

a) $x = 13$ b) $x = 9$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

٤) حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$

a) $x = -3$ او $x = -5$ b) $x = 3$ او $x = -5$ c) $x = -3$ او $x = 5$ d) $x = 3$ او $x = 5$

٥) حل جملة المعادلات التالية $3x + 2y = 8$
$2x + y = 5$

a) $x = 2 , y = 1$ b) $x = -2 , y = 1$ c) $x = 2 , y = -1$ d) $x = 1 , y = 2$

٦) حل المعادلة التالية $2x + 30 = 0$

a) $x = -15$ b) $x = 15$ c) $x = 30$ d) $x = 2$

٧) حل المعادلة التالية $4x = 2x + 2$

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -2$ d) $x = -1$

٨) حل المعادلة التالية $x^2 + 13x + 36 = 0$

a) $x = -9$ او $x = -4$ b) $x = 9$ او $x = 4$ c) $x = 5$ او $x = 4$ d) $x = -5$ او $x = -4$

٩) حل المعادلة التالية $x^2 + 5x - 14 = 0$

a) $x = -7$ او $x = 2$ b) $x = 7$ او $x = -2$ c) $x = 2$ او $x = 7$ d) $x = 5$ او $x = 2$

١٠) حل المعادلة التالية $x^2 - 5x - 14 = 0$

a) $x = -7$ او $x = 2$ b) $x = -7$ او $x = -2$ c) $x = 7$ او $x = 2$ d) $x = 7$ او $x = -2$

١١) حل المعادلة التالية $5x - 10 = 5$

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

١٢) حل المعادلة التالية $4x = x + 12$

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

١٣) حل المعادلة التالية $x^2 - 4 = 0$

a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm 2$ c) $x = \pm 3$ d) $x = \pm 4$

١٤) حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$

a) $x = -3$ او $x = -5$ b) $x = 3$ او $x = 5$ c) $x = -3$ او $x = 5$ d) $x = 3$ او $x = -5$

١٥) حل جملة المعادلات التالية

$$3x + 2y = 8$$
$$2x + y = 5$$

a) $x = 2\ , y = 1$ b) $x = 1\ , y = 2$ c) $x = -2\ , y = 1$ d) $x = 2\ , y = -1$

20) حل جملة المعادلات التالية

$$2x - y = -9$$
$$x + 2y = 8$$

a) $x = -2\ , y = 5$ b) $x = 2\ , y = 5$ c) $x = 2\ , y = -5$ d) $x = -2\ , y = -5$

١٦) حل جملة المعادلات التالية

$$6x + 2y + 4z = 14$$
$$3x + 2y - 8z = -1$$
$$-3x - 6y + 5z = -10$$

a) $x = 1\ , y = 2, z = 1$ b) $x = 1\ , y = 1, z = 1$ c) $x = 0\ , y = 2, z = 1$ d) $x = 1\ , y = 3, z = 3$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
٢٥					
٢٦					
٢٧					
٢٨					
٢٩					
٣٠					
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: ....
رقم المتدرب :	المحاولة : ☐ ☐ ☐ ☐ العلامة : ....

كل بند أو مفردة يقيم بـ ☐☐ نقاط

الحد الأدنى: ما يعادل ☐☐٪ من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل ☐☐☐٪ من مجموع النقاط.

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		☐	☐	☐	☐
١٩					
٢٠					
٢١					
٢٢					
٢٣					
٢٤					
المجموع					

ملحوظات:

....

توقيع المدرب: ....

الوحدة السادسة

الهندسة المستوية والفراغية

الوحدة السادسة

الهندسة المستوية والفراغية

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مبادئ الهندسة المستوية والفراغية.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على:

١. معرفة الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)
٢. حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.
٣. معرفة اشكال الهندسة الفراغية (المكعب- الأسطوانة -البيضاوي-المخروط)
٤. حساب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

الهندسة المستوية

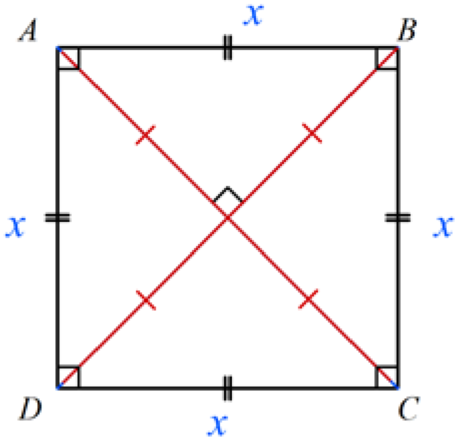
الهندسة المستوية فرع من الرياضيات يهتم بدراسة الأشكال الهندسية التي تقع كل نقاطها في مستوٍ واحد ، وتنقسم الى قسمين هما المضلعات و الدائرة.

1.6 الاشكال الرباعية :

الشكل الرباعي هو كل شكل هندسي مغلق له أربعة اضلاع وأربعة زوايا ومجموع زواياه تساوي $360°$
ومن الأمثلة على الشكل الرباعي (المربع – المستطيل – المعين – شبه المنحرف – متوازي الأضلاع)

1.1.6 المربع

المربع هو شكل رباعي له أربعة أضلاع متساوية وجميع زواياه قائمة كما في الشكل 6-1.



شكل $1-6$

مساحة و محيط المربع

إذا كان طول ضلع المربع x فإن:

مساحة المربع : $A = x^2$

محيط المربع : $P = 4\,x$

مثال 1: احسب مساحة و محيط المربع الذي طول ضلعه $3\ \text{cm}$.

الحل :

المساحة $A = x^2$

$$A = (3)^2 = 9\ cm^2$$

المحيط $P = 4\,x$

$$P = 4 \times 3 = 12\ cm$$

مثال 2: سجادة مربعة الشكل طولها 6m احسب مساحتها ومحيطها

الحل :

□المساحة: $A = x^2$

$A = (6)^2 = 36\ m^2$

▱المحيط : $P = 4\,x$

$P = 4 \times 6 = 24\ m$

مثال 3 : حديقة مربعة ال شكل محيطها $24\ m$, احـ سب طول ضلعها ثم احـ سب مـ ساحة الحديقة

□الحل :

$P = 4\,x = 24$

$4\,x = 24$

$x = \frac{24}{4} = 6\ m$ إذا طول ضلع الحديقة يساوى $6\ m$

$A = x^2$

$A = (\,6\,)^2 = 36\ m^2$ إذا مساحة الحديقة تساوى $36\ m^2$

مثال 4 : مربع مساحته $9\ cm^2$, أوجد طول ضلعه ثم أوجد محيطه

□الحل :

$A = x^2 = 9$

$x^2 = 9$ □

$x = \sqrt{9} = 3\ cm$ □إذا طول ضلع المربع يساوى $3\ cm$

$P = 4\,x$

$P = 4 \times 3 = 12\ cm$

إذا محيط المربع يساوى $12\ cm$

تمرين 1 : إختر الاجابة الصحيحة :

1- مربع طول ضلعه $7\ cm$ فإن محيطه يساوى

a) $14\ cm$ b) $28\ cm$ c) $49\ cm$ d) $11\ cm$□

2- حديقة مربعة الشكل طولها $10\ m$, فإن مساحة الحديقة تساوى

a) $40\ m^2$ b) $20\ m^2$ c) $10\ m^2$ d) $100\ m^2$

3- مربع محيطه $12\ cm$, فإن طول ضلعه يساوى

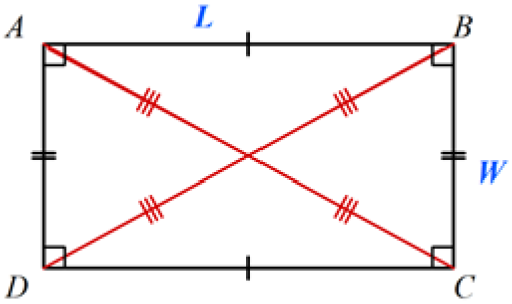
a) $3\ cm$ b) $7\ cm$ c) $4\ cm$ d) $12\ cm$

4- مربع مساحته $100\ cm^2$, فإن طول ضلع المربع يساوى

a) $20\ cm$ b) $100\ cm$ c) $4\ cm$ d) $10\ cm$□

2.1.6 المستطيل :

المستطيل هو شكل رباعي له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين وجميع زواياه قائمة ، كما في الشكل 6 -2



شكل $2-6$

مساحة و محيط المستطيل

إذا كان طول المستطيل L و عرض المستطيل W فإن:□

مساحة المستطيل : $A = L \times W$

محيط المستطيل : $P = 2(L + W)$

مثال 5: احسب مساحة و محيط مستطيل طوله 3 cm و عرضه 2 cm

الحل :

$$A = L \times W$$
$$A = 2 \times 3 = 6\ cm^2$$

إذا مساحة المستطيل تساوي $6\ cm^2$

$$P = (L + W) \times 2$$
$$P = (3 + 2) \times 2$$
$$P = 5 \times 2 = 10\ cm$$

إذا محيط المستطيل يساوي $10\ cm$

مثال 6: غرفة معيشة طولها 6 m و عرضها 4 m ، أوجد مساحتها و محيطها

الحل :

$$A = L \times W$$
$$A = 6 \times 4 = 24\ m^2$$

إذا مساحة الغرفة تساوي $24\ m^2$

$$P = 2(L + W)$$
$$P = 2(6 + 4)$$
$$P = 2(10) = 20\ m$$

إذا محيط الغرفة يساوي $20\ m$

تمرين 2: اختر الاجابة الصحيحة:

1- مستطيل طوله 5 cm و عرضه 3 cm فإن مساحته تساوي

a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm^2$ c) $15\ cm^2$ d) $10\ cm^2$ □

2- مستطيل طوله 7 cm و عرضه 4 cm فإن محيطه يساوي

a) $14\ cm$ b) $22\ cm$ c) $14\ cm^2$ d) $12\ cm$ □

3- إذا كانت لدينا حديقة طولها 10 m و عرضها 5 m , فإن مساحتها تساوي

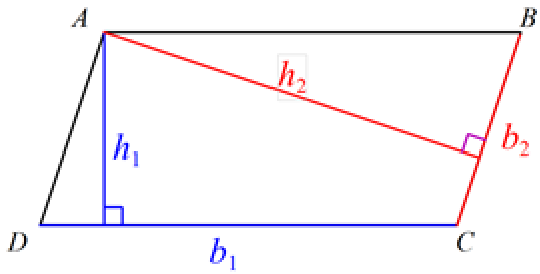
a) $10\ m^2$ b) $15\ m^2$ c) $25\ m^2$ d) $50\ m^2$ □

4 - إذا كانت لدينا حديقة طولها 10 m و عرضها 5 m , فإن محيطها يساوي

a) $30\ m$ b) $15\ m$ c) $30\ m^2$ d) $10\ m$ □

3.1.6 متوازى الأضلاع :

هو عبارة عن شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول و كل زاويتين متقابلتين متساويتين، كما في الشكل 3-6



شكل $3-6$

مساحة و محيط متوازي الاضلاع

إذا كان طول القاعدة b و الارتفاع المناظر له h

المحيط $P = AB + BC + CD + AD$

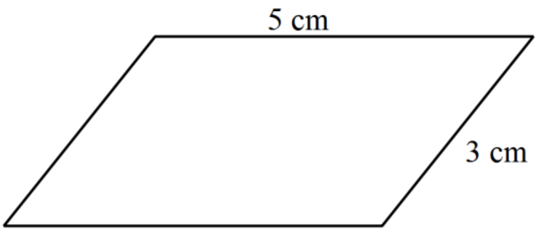
المساحة $A = b_1 \times h_1$

$A = b_2 \times h_2$

ملاحظه 1 : القاعدة الصغرى b_2 يقابلها الارتفاع الأكبر h_2

و القاعدة الكبرى b_1 يقابلها الارتفاع الأصغر h_1

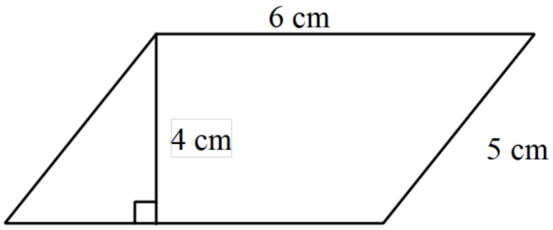
مثال 7 : أوجد محيط متوازى الأضلاع



الحل :

$$P = 5 + 3 + 5 + 3 = 16\ cm$$

مثال 8: أوجد مساحة متوازى الأضلاع



الحل :

$$A = b \times h$$
$$A = 6 \times 4 = 24\ cm^2$$

مثال 9: متوازى الأ ضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $14\ cm$, $8\ cm$ احسب محيطه و مساحته إذا كان إرتفاعه الأصغر $5\ cm$

الحل :

المحيط $P = 2\left(\text{مجموع ضلعين متجاورين}\right)$

$$P = 2(8 + 14) = 2(22) = 44\ cm$$

المساحة $A = b \times h$ (الارتفاع الاصغر يقابل القاعدة الكبرى)

$$A = 14 \times 5 = 70\ cm^2$$

مثال 10: متوازى الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8\ cm$, $10\ cm$. احسب مساحته إذا كان إرتفاعه الأكبر $6\ cm$

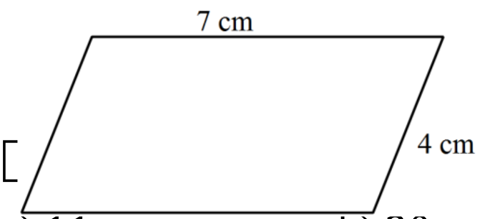
الحل :

الارتفاع الاكبر يقابل القاعدة الصغرى

$$A = b \times h$$
$$A = 8 \times 6 = 48\ cm^2$$

تمرين 3: إختر الاجابة الصحيحة :

1- محيط متوازى الأضلاع يساوى

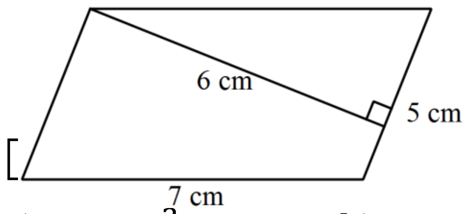


a) $11\ cm$ b) $20\ cm$ c) $22\ cm$ d) $7\ cm$

2- متوازى أضلاع طول قاعدته $6\ cm$ و طول الارتفاع المناظر للقاعده $3\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $18\ cm^2$ b) $20\ cm^2$ c) $9\ cm^2$ d) $17\ cm^2$

3- مساحة متوازى الأضلاع يساوى



a) $24\ cm^2$ b) $20\ cm^2$ c) $30\ cm^2$ d) $42\ cm^2$

4- متوازى الأ ضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $11\ cm$, $5\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأ صغر $4\ cm$. فإن مساحته تساوى

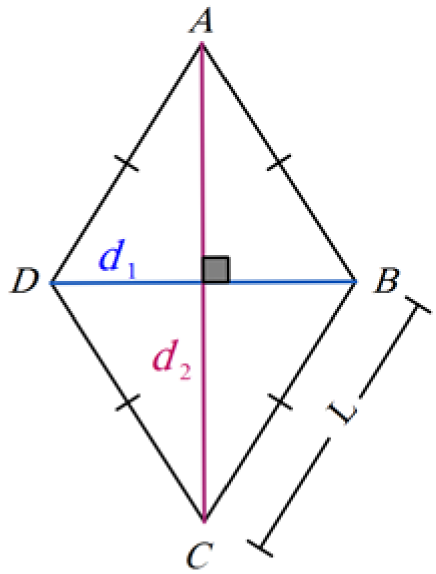
a) $32\ cm^2$ b) $20\ cm^2$ c) $40\ cm^2$ d) $44\ cm^2$

5- متوازى الأ ضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $7\ cm$, $12\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأكبر $5\ cm$. فإن مساحته تساوى ....

a) $20\ cm^2$ b) $35\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $30\ cm^2$ □

4.1.6 المعين :

هو عبارة عن شكل رباعي جميع اضلاعه متساوية وكل زاويتين متقابلتين متساويتين كما في شكل كما في شكل 6 - 4



شكل 6 – 4

مساحة ومحيط المعين

إذا كان طول ضلع المعين L وقطراه d_1 , d_2

المحيط $P = AB + BC + CD + AD$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

مثال 11: أوجد محيط المعين الذى طول ضلعه $6\ cm$.

الحل :

$$P = 4\,\mathrm{L}$$
$$P = 4 \times 6 = 24\ cm$$

مثال 12: أوجد مساحة المعين الذى طولا قطريه $7\ cm$ ، $4\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$
$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14\ cm^2$$

مثال 13: معين محيطه 12 cm , أوجد طول ضلعه

الحل :

$$P = 4\,\mathrm{L}$$
$$L = \frac{P}{4} = \frac{12}{4}$$
$$L = 3\ cm$$

إذا طول ضلع المعين يساوى $3\ cm$

تمرين 4 اختر الاجابة الصحيحة :

1- معين طول ضلعه $7\ cm$, فإن محيطه يساوى

a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $49\ cm$ d) $28\ cm$ □

2- معين طولا قطريه $7\ cm$, $6\ cm$ فإن مساحة المعين تساوى

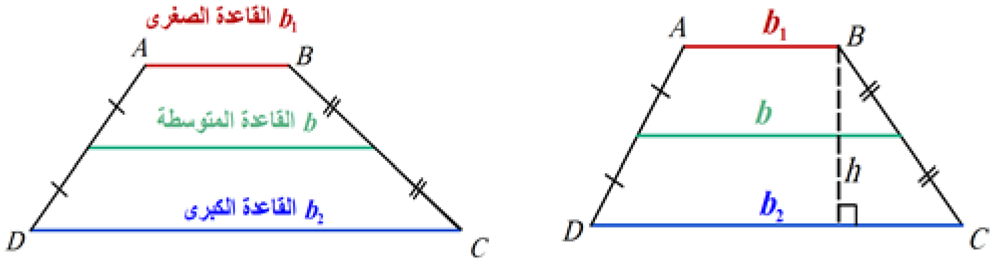
a) $42\ cm^2$ b) $13\ cm^2$ c) $21\ cm^2$ d) $50\ cm^2$

3 - معين محيطه $16\ cm$, فإن طول ضلعه يساوى

a) $16\ cm$ b) $8\ cm$ c) $2\ cm$ d) $4\ cm$

5.1.6 شبه المنحرف :

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف القاعدة الصغرى والقاعدة الكبرى ، كما في الشكل 6 - 5



شكل $5-6$

مساحة ومحيط شبه المنحرف

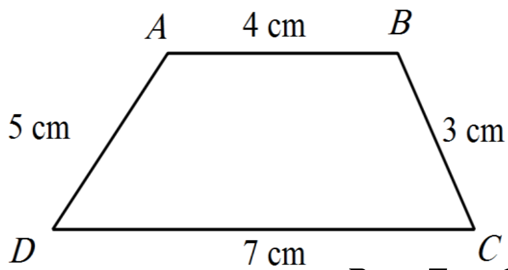
إذا كان طول القاعدة الصغرى b_1 وطول القاعدة الكبرى b_2 وطول القاعدة المتوسطة b و الارتفاع h

محيط شبه المنحرف: $P = AB + BC + CD + AD$

مساحة شبه المنحرف: $A = b \times h$

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

مثال 14 : أوجد محيط شبه المنحرف



الحل :

$$P = 7 + 3 + 4 + 5 = 19\ cm$$

مثال 15 : شبه منحرف طول قاعدته المتو سطة $17\ cm$ و إرتفاعه $11\ cm$, أوجد م ساحة شبه المنحرف .

الحل :

$$A = b \times h$$
$$A = 17 \times 11 = 187\ cm^2 \square$$

مثال 16 : أوجد مساحة شبه المنحرف الذى طول قاعدته الصغرى $3\ cm$ وقاعدته الكبرى $5\ cm$ و طول ارتفاعه $4\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$
$$A = \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 4 = 16\ cm^2 \square$$

تمرين 5 : اختر الاجابة الصحيحة :

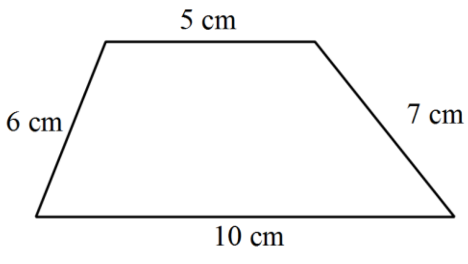
1- شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة $6\ cm$ و طول ارتفاعه $5\ cm$, فإن مساحته تساوى

a) $25\ cm^2$ b) $11\ cm$ c) $30\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

2- شبه منحرف طول قاعدتيه الكبرى وال صغرى $7\ cm$, $5\ cm$ و طول إرتفاعه $4\ cm$ فإن مساحته تساوى

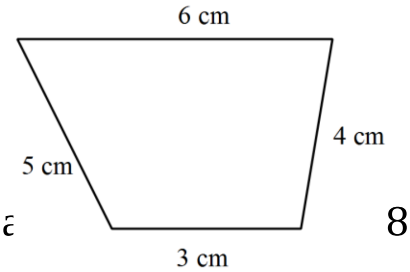
a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm$ c) $28\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

3- محيط شبه المنحرف المقابل يساوى



a) 38 cm b) 18 cm c) 27 cm d) 28 cm

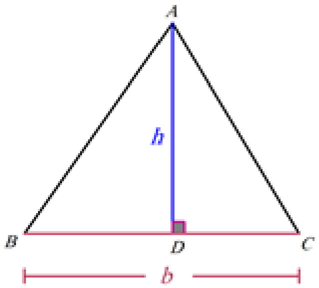
4- محيط شبه المنحرف المقابل يساوى



8 cm c) 15 cm d) 20 cm

2.6 **المثلث :**

المثلث هو مضلع يتكون من ثلاث أضلاع و ثلاث زوايا ومجموع زوايا المثلث الداخلية تساوى $180°$ كما في الشكل 6 - 6



شكل $6-6$

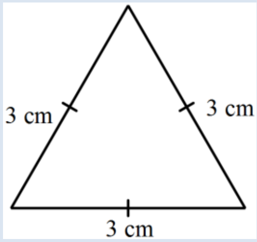
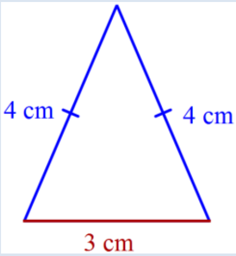
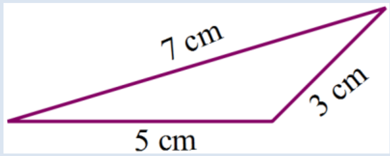
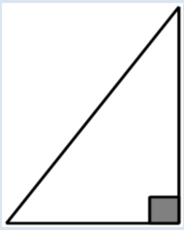
مساحة ومحيط المثلث

إذا كان طول القاعدة للمثلث b وارتفاع المثلث h :

محيط المثلث : $P = AC + BC + AB$

مساحة المثلث: $\square A = \frac{1}{2} \times b \times h$

أنواع المثلثات :

1- مثلث متساوي الأضلاع 	2- مثلث متساوي الساقين 
3- مثلث مختلف الأضلاع 	4- مثلث قائم الزاوية 

مثال 17 : أوجد محيط المثلث الذى أطوال أضلاعه $3\ cm\ , 4\ cm\ , 5\ cm$

الحل :

$$P = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$$

مثال 18 : أوجد مساحة المثلث الذى طول قاعدته $12\ cm$ و طول ارتفاعه $8\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48\ cm^2$$

مثال 19 : مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $7\ cm$, احسب محيط و مساحة المثلث إذا كان طول ارتفاعه $8\ cm$.

الحل :

$$P = 7 + 7 + 7 = 3(7) = 21\ cm$$
$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$
$$A = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \quad = 28\ cm^2$$

تمرين6 : اختر الاجابة الصحيحة :

1- مثلث أطوال أضلاعه $4\ cm$, $3\ cm$, $4\ cm$. فإن محيطه يساوى

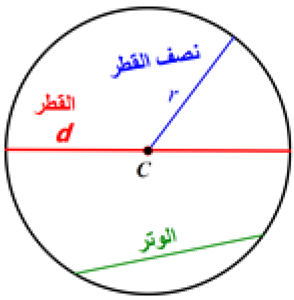
a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $48\ cm$ d) $11\ cm$ ☐

2- مثلث طول قاعدته $8\ cm$, و طول إرتفاعه $3\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $12\ cm^2$ ☐ b) $12\ cm$ c) $24\ cm^2$ d) $11\ cm^2$

3.6 **الدائرة :**

هى مجموعة النقاط التى تبعد نفس البعد عن نقطه ثابته ، و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و البعد الثابت يسمى نصف القطر .



شكل $6 - 7$

مساحة و محيط الدائرة

إذا كان r طول نصف قطر الدائرة فإن:

مساحة الدائرة : $A = \pi\, r^2$

محيط الدائرة : $P = 2\,\pi\, r$

حيث π هى نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) تساوى :

$$\pi = \frac{22}{7} \approx 3.14$$

مثال 20: أوجد محيط و مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها $7\ cm$.

الحل :

$$C = 2\,\pi\, r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44\ cm$$

$$A = \pi\, r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times\ (7)^2 = 154\ cm^2$$

مثال 21: دائرة طول قطرها $20\ cm$, أوجد محيط و مساحة الدائرة

الحل :

طول القطر يساوي $20\ cm$ إذاً نصف القطر يساوي $r = 10\ cm$

$$C = 2\,\pi\, r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 62.85\ cm$$

إذا محيط الدائرة يساوي $62.85\ cm$

$$A = \pi\, r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times\ (10)^2 = 314.28\ cm^2$$

إذا مساحة الدائرة تساوي $346.5\ cm^2$

مثال 22 : حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66\ m$, أوجد مساحة الحديقة

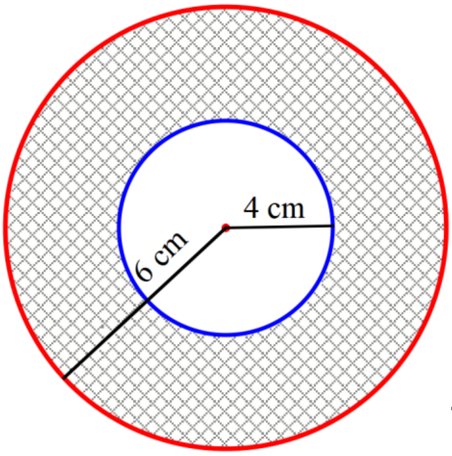
الحل :

$$C = 2\,\pi\, r$$

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{66}{2 \times 3.14} \approx 10.5\ m$$

$$A = \pi\, r^2 = 3.14 \times (10.5)^2 = 346.2\ m^2$$

مثال 23: أوجد مساحة الجزء المظلل



$\pi \approx 3.14$

الحل :

مساحة الجزء المظلل A ، مساحة الدائرة الخار.

، مساحة الدائرة الداخلية A_2

مساحة الجزء المظلل = مساحة الدائرة الخارجية A_1 − مساحة الدائرة الداخلية A_2

$$A_1 = \pi r^2 = 3.14 \times (6)^2 = 113.04\ cm^2$$
$$A_2 = \pi r^2 = 3.14 \times (4)^2 = 50.24\ cm^2$$
$$A = A_1 - A_2 = 113.04 - 50.24 = 62.8\ cm^2$$

تمرين 7 :اختر الاجابة الصحيحة :

1- دائرة نصف قطرها يساوي $8\ cm$ ، فإن محيطها يساوي

a) $62.8\ cm$ b) $68.2\ cm$ c) $50.24\ cm$ d) $10\ cm$

2- دائرة نصف قطرها يساوي $3\ cm$ ، فإن مساحتها تساوي ....

a) $9\pi\ cm^2$ b) $3\pi\ cm^2$ c) $9\ cm^2$ d) $6\pi\ cm^2$

3- دائرة طول قطرها يساوي $14\ cm$ ، فإن طول نصف قطرها يساوي ....

a) $28\ cm$ b) $14\ cm$ c) $2\ cm$ d) $7\ cm$

4- دائرة طول نصف قطرها يساوي $8\ cm$ ، فإن طول قطرها يساوي ....

a) $8\ cm$ b) $16\ cm$ c) $12\ cm$ d) $4\ cm$

تمارين□ 6- 1

1- محيط الدائرة =

a) $2\pi r$ b) πr^2 c) πd□ d) π

2- مساحة الدائرة =

a) πr^2□ b) $2\pi r$□ c) πd□ d) π

3- مربع طول ضلعه $5\ cm$ فإن محيطه يساوى

a) $20\ cm$□ b) $25\ cm$□ c) $10\ cm$□ d) $15\ cm$

4- مربع طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوى

a) $64\ cm^2$ b) $28\ cm^2$ c) $24\ cm^2$ d) $32\ cm^2$

5- مستطيل طوله 10 cm و عرضه 5 cm فإن محيطه يساوى

a) $30\ cm$ b) $15\ cm$ c) $50\ cm$ d) $10\ cm$

6- مستطيل طوله 7 cm و عرضه 3 cm فإن مساحته تساوى ....

a) $15cm^2$ b) $10\ cm^2$ c) $20\ cm^2$ d) $21\ cm^2$

7- معين محيطه $28\ cm$ ، فإن طول ضلع المعين يساوى

a) $7\ cm$ b) $24\ cm$ c) $4\ cm$ d) $8\ cm$

8- مثلث أطوال أضلاعه $4\ cm$, $7\ cm$, $5\ cm$ ، فإن محيطه يساوى ....

a) $15\ cm$ b) $12\ cm$ c) $16\ cm$ d) $100\ cm$

9- مساحة المثلث =

a) $\frac{1}{2} \times b \times h$ b) $b \times h$ c) $s \times 4$ d) $L \times W$

10- مثلث طول قاعدته $10\ cm$ و إرتفاعه $7\ cm$ فإن مساحته تساوى ....

a) $21\ cm^2$ b) $70\ cm^2$ c) $17\ cm^2$ d) $35\ cm^2$

11- مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $4\ cm$ فإن محيطه يساوي ....

a) $16\ cm$ b) $12\ cm$ c) $40\ cm$ d) $8\ cm$

12- مربع مساحته $16\ cm^2$, فإن طول ضلعه يساوي ....

a) $12\ cm$ b) $3\ cm$ c) $8\ cm$ d) $4\ cm$

13- مربع محيطه $32\ cm$, فإن طول ضلعه يساوي ....

a) $8\ cm$ b) $7\ cm$ c) $32\ cm$ d) $4\ cm$

14- شبه منحرف طول قاعدتيه الـ صغرى و الكبرى $4\ cm$, $6\ cm$ و طول إرتفاعه $7\ cm$ فإن مساحته تساوي

a) $30\ cm^2$ b) $42\ cm^2$ c) $35\ cm^2$ d) $28\ cm^2$

15- شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة $11\ cm$ و طول ارتفاعه $7\ cm$, فإن مساحته

a) $77\ cm^2$ b) $18\ cm^2$ c) $4\ cm^2$ d) $9\ cm^2$

16- معين طول ضلعه $4\ cm$, فإن محيطه يساوي ....

a) $12\ cm$ b) $8\ cm$ c) $40\ cm$ d) $16cm$

17- مساحة المستطيل = ...

a) $L \times W$ b) $2(L + W)$ c) $L \times 4$ d) $\pi\ r^2$

18- معين طولا قطريه $8\ cm$, $5\ cm$, فإن مساحته تساوي ....

a) $10\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $4\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

19- دائرة نصف قطرها $3\ cm$, فإن طول قطرها يساوي

a) $6\ cm$ b) $9\ cm$ c) $3\ cm$ d) $5\ cm$

20- دائرة طول قطرها $10\ cm$, فإن طول نصف قطرها

a)$10\ cm$ b) $5\ cm$ c) $3\ cm$ d) $2\ cm$

21- متوازى الأ ضلاع فيه طولا ضلعين متجاورين $7\ cm\ ,4\ cm$ فإن محيط متوازى الأضلاع يساوى

a) $22\ cm$ b) $11\ cm$ c) $28\ cm$ d) $3\ cm$

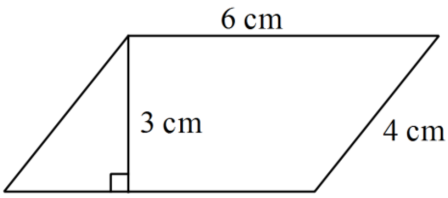
22- دائرة طول نصف قطرها يساوى $2\ cm$ ، فإن محيط الدائرة =

a) $4\ cm$ b) $12.56\ cm$ c) $3.14\ cm$ d) $10\ cm$

23- دائرة طول نصف قطرها يساوى $5\ cm$ ، فإن مساحة الدائرة = ...

a) $78.5\ cm^2$ b) $31.4\ cm^2$ c) $25\ cm^2$ d) $3.14\ cm^2$

24- مساحة متوازى الأضلاع =



a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $13\ cm^2$

25- متوازي الأ ضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $6\ cm\ ,10\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأصغر $4\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ....

a) $24\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $240\ cm^2$

26- متوازي الأ ضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $6\ cm\ ,10\ cm$ و إذا كان إرتفاعه الأكبر $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوى ....

a) $30\ cm^2$ b) $21\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $50\ cm^2$

27- مساحة متوازي الأضلاع = ...

a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) S^2 d) $L \times W$

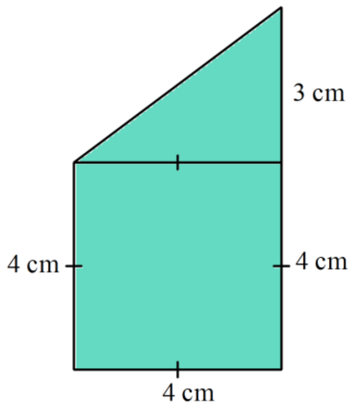
28- مساحة المعين = ...

a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ d) $L \times W$

29- دائرة طول قطرها $6\ cm$, فإن محيط الدائرة يساوى ....

a) $18.84\ cm$ b) $3.14\ cm$ c) $36\ cm$ d) $3\ cm$

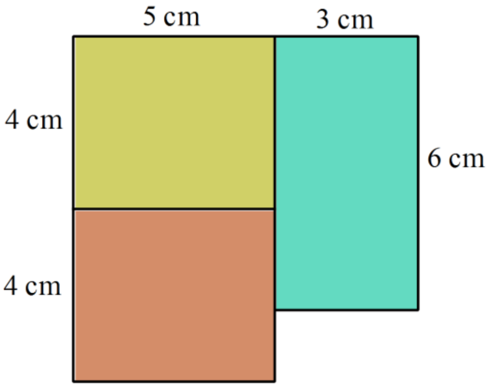
30- مساحة الشكل المقابل = ...



a) $20\ cm^2$ b) $15\ cm^2$ c) $18\ cm^2$ d) $22\ cm^2$

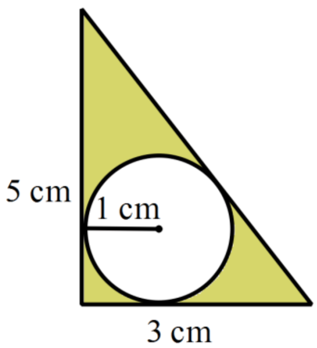
31- بيت مكون من ثلاث غرف كما بالشكل المقابل

فإن مساحة البيت = ...



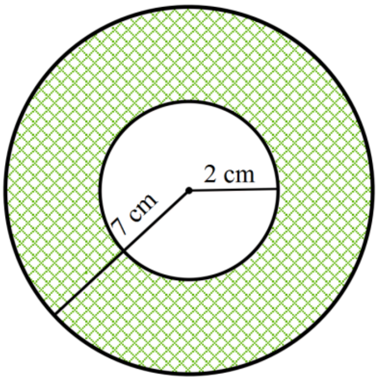
a) $38\ cm^2$ b) $16\ cm^2$ c) $22\ cm^2$ d) $58\ cm^2$

32- مساحة الجزء المظلل = ...



a) $15\ cm^2$ b) $4.36\ cm^2$ c) $14\ cm^2$ d) $9\ cm^2$

33- مساحة الجزء المظلل = ...



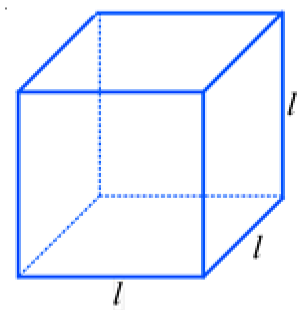
a) 141.3 cm^2 b) 114.3 cm^2 c) 14 cm^2 d) 9 cm^2

الهندسة الفراغية

درسنا الهندسة المستوية التي لها بعدان فقط هما الطول والعرض، أما في الهندسة الفراغية فإننا سوف ندرس المجسمات أو الاشكال الثلاثية الابعاد التي ابعادها هي الطول والعرض والارتفاع.

5.6 المكعب :

المكعب هو جسم له ستة أوجه متطابقة، كل وجه منها عبارة عن مربع و كل أحرفه الجانبية متساوية و أي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب ، كما في الشكل $8-6$



شكل $8-6$

مساحة وحجم المكعب

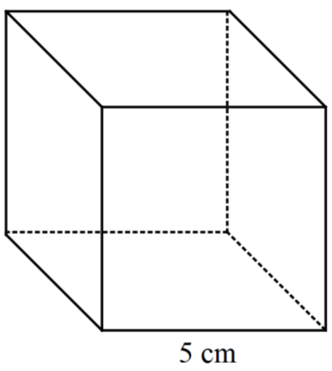
إذا كان طول حرف المكعب l

المساحة $S.A = 6\, l^2$

الحجم $V = l^3$

مثال 24: مكعب طول حرفه $5\ cm$ ،

أوجد مساحته سطحه و حجمه



الحل :

المساحة $S.A = 6\,l^2$

$$S.A = 6 \times (5)^2 = 150\ cm^2$$

الحجم $V = l^3 = (5)^3 = 125\ cm^3$

مثال 25: وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7\ cm$, أوجد مساحته سطحه و حجمه .

الحل :

$$S.A = 6\,l^2 = 6 \times (7)^2 = 294\ cm^2$$
$$V = l^3 = (7)^3 = 343\ cm^3$$

مثال 26: مكعب حجمه $27\ cm^3$, أوجد طول حرفه .

الحل :

$$V = l^3$$
$$l = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{27} = 3\ cm$$

إذا طول حرف المكعب $3\ cm$

مثال 27: مكعب مساحته $24\ cm^2$, أوجد طول حرفه .

الحل :

$$S.A = 6\,l^2$$
$$6\,l^2 = 24$$
$$l^2 = \frac{24}{6} = 4$$
$$l = \sqrt{4} = 2\ cm$$

إذا طول حرف المكعب $2\ cm$

تمرين8: إختر الاجابة الصحيحة :

1- مكعب طول حرفه $4\ cm$, فإن حجمه يساوى

a) $16\ cm^3$ b) $32\ cm^2$ c) $64\ cm^3$ d) $12\ cm^3$

2- مكعب طول حرفه $6\ cm$, فإن مساحتة سطحه تساوى

a) $6\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $12\ cm^2$ d) $216\ cm^3$

3- مكعب حجمه $8\ cm^3$, فإن طول حرفه يساوى

a) $12\ cm$ b) $4\ cm$ c) $8\ cm$ d) $2\ cm$

4- مكعب مساحة سطحه $216\ cm^2$, فإن طول حرفه يساوى ....

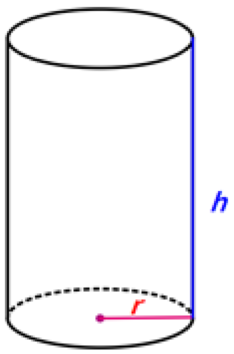
a) $4\ cm$ b) $6\ cm$ c) $8\ cm$ d) $5\ cm$

6.6 الأسطوانة :

الأسطوانة هي جسم له سطح منحنى مغلق وقاعدته عبارة عن دائرتين متطابقتين ومتوازيتين.

من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الأسطوانة ، كما في الشكل 6 - 9



شكل 6 – 9

مساحة وحجم الاسطوانة

إذا كان نصف قطر القاعدة r و الارتفاع h فإن: ☐

المساحة $S.A = 2\pi r(h+r)$

الحجم $V = \pi r^2 h$

مثال 28: أسطوانة نصف قطر قاعدتها $9\ cm$ و إرتفاعها $11\ cm$, أوجد مساحة سطحه وحجم الأسطوانة .

الحل :

$$S.A = 2\pi r(h+r) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (11+9)$$
$$S.A = 1130.4\ cm^2$$

إذا مسحة السطح تساوى $1130.4\ cm^2$

$$V = \pi\ r^2\ h$$
$$V = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74\ cm^3$$

إذا الحجم يساوى $2797.74\ cm^3$

تمرين 9: **إختر الاجابة الصحيحة :**

1- إسطوانة إرتفاعها $7\ cm$ و نصف قطرها $5\ cm$ فإن مساحة سطحه تساوى ....

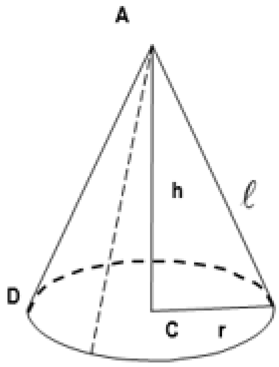
a) $376.8\ cm^2$ b) $366.8\ cm^2$ c) $35\ cm^2$ d) $12\ cm^2$

2- إسطوانة إرتفاعها $20\ cm$ و نصف قطرها $6.5\ cm$ فإن حجم الاسطوانه تساوى ....

a) $2653.3\ cm^3$ b) $130\ cm^3$ c) $100\ cm^3$ d) $65.2\ cm^3$

7.6 المخروط :

المخروط هو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r , و رأس بعده العمودى عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط، كما في الشكل $10-6$



شكل $10-6$

مساحة وحجم المخروط

إذا كان نصف قطر القاعدة r والارتفاع h و l طول المولد فإن: $\square$

المساحة
$$S.A = \pi\, r\, l + \pi\, r^2$$
$$= \pi\, r(\, l + r\,)$$

الحجم
$$V = \frac{1}{3}\pi\ r^2\, h$$

مثال 29 : مخروط دائري قائم ذ صف قطر قاعدته 14 cm و طول ارتفاعه 11 cm وطول المولد

10 cm احسب مساحة سطحه وحجمه.

الحل :

المساحة

$$S.A = \ \pi\, r\, l + \pi r^2 = \pi r(\ l + r\,)$$
$$S.A = \ 3.14 \times 14(\,10 + 14\,) = 615.44\ \ cm^2$$

الحجم

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (14)^2 \times 11 = 2256.61\; cm^3$$

تمرين 10 : اختر الاجابة الصحيحة :

1- مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 11 cm , فإن مساحة سطحه تساوي

a) $461.58\; cm^2$ b) $207.24\; cm^2$ c) $565.2\; cm^2$ d) $100\; cm^2$

2- مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته 8 cm و طول إرتفاعه 12 cm , فإن الحجم يساوى

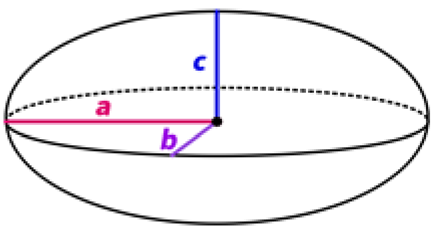
a) $96\; cm^3$ b) $803.84\; cm^3$ c) $66.9\; cm^3$ d) $20\; cm^3$

8.6 **البيضاوي:**

هو المنحني المستوي الذي يحقق الخاصية التالية:

مجموع بُعد أي نقطة على هذا المنحنى عن نقطتين ثابتين داخله يبقى ثابتا .

و الشكل الهندسي البيضاوي (كرة مضغوطة بانتظام) و المتماثل بالنسبة لمحورية الرئيسي و الثانوي .



شكل 6 – 11

مساحة وحجم البيضاوي

إذا كان $a\ ,b\ ,c$ أنصاف أقطار البيضاوي فإن:

المساحة

$$S.A = 4\pi \left(\frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

الحجم

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$$

مثال 30: بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 21\ cm\ ,b = 15\ cm\ ,c = 2\ cm$

احسب مساحة البيضاوي وحجمه .

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S.A = 4\pi \left(\frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left(\frac{(21\times 15)^{1.6}+(21\times 2)^{1.6}+(15\times 2)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A \approx 2068.67\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$$

$$V = \frac{4}{3}\times\ 3.14 \times 21 \times 15 \times 2 = 2640\ cm^3$$

مثال 31: بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 12\ cm\ ,b = 10\ cm\ ,\ c = 9\ cm$

احسب مساحة البيضاوي وحجمه .

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S.A = 4\pi \left(\frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625} \square$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left(\frac{(12 \times 10)^{1.6} + (12 \times 9)^{1.6} + (10 \times 9)^{1.6}}{3} \right)^{0.625} \square$$

$$S.A \approx 1336.78\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3}\ \pi\ a\ b\ c$$

$$V = \frac{4}{3} \times\ 3.14 \times 12 \times 10 \times 9 = 4521.6\ \ cm^3$$

□

□

تمرين 11 : اختر الاجابة الصحيحة :

1- بيضاوي أنصاف أقطاره $a\ =\ 9\ cm\ \ ,b =\ 6\ cm\ ,\ \ c\ =\ 3\ cm$

فإن مساحة البيضاوي =

a) $440.75\ cm^2$ b) $18\ cm^2$ c) $162\ cm^2$ d) $200.5\ cm^2$

2- بيضاوي أنصاف أقطاره $a\ =\ 12\ cm\ \ ,b =\ 10\ cm\ ,\ \ c\ =\ 6\ cm$

فإن حجم البيضاوي = .

a) $3015.92\ cm^3$ b) $207.24\ cm^2$ c) $28\ cm^2$ d) $720\ cm^2$

□

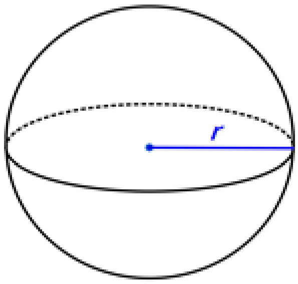
□

□

□

9.6 الكرة :

الكرة هي جسم ذات سطح منحنى مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبتعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابته داخل الكرة و تسمى هذه النقطة بمركز الكرة كما في الشكل 6 - 12



شكل 6 – 12

مساحة وحجم الكرة

إذا كان نصف قطر الكرة r فإن :□

المساحة $S.A = 4\pi r^2$

الحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال 32: كرة نصف قطرها $17\ cm$, احسب كلا من حجمها و مساحة سطحه.

الحل :

$$S.A = 4\pi r^2$$
$$S.A = 4 \times 3.14 \times (17)^2 = 3631.68\ cm^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 20569.09\ cm^3$

مثال 33: كرة نصف قطرها $10\ cm$, احسب كلا من حجمها و مساحتها السطحية .

الحل :

$S.A = 4\,\pi\,r^2$
$S.A = 4 \times 3.14 \times (10)^2 = 1256\ cm^2$
$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$
$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10)^3 \approx 4186.7\ cm^3$

تمرين 12 اختر الاجابة الصحيحة :

1- كرة نصف قطرها $3\ cm$, فإن حجمها يساوى

a) $27.3\ cm^3$ b) $121.05\ cm^3$ c) $30\ cm^3$ d) $113.04\ cm^3$

2- كرة نصف قطرها $4\ cm$, فإن مساحتها تساوي

a) $200.96\ cm^2$ b) $130\ cm^2$ c) $100\ cm^2$ d) $267.9\ cm^2$

تمارين□ 6- 2

1- حجم المكعب = ...

a) l^3　　b) $4\ l^2$　　c) $6\ l^2$□　　d) $2\ \pi r$

2- مساحة المكعب = ...

a) $4\ l^2$□　　b) l^3□　　c) $6\ l^2$□　　d) π

3- مكعب طول حرفه $5\ cm$ فإن حجمه يساوى ....

a) $64\ cm^3$□　　b) $16\ cm^3$□　　c) $20\ cm^3$□　　d) $125\ cm^3$

4- مكعب طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوى ....

a) $256\ cm^2$　　b) $64\ cm^2$　　c) $384\ cm^2$　　d) $32\ cm^2$

5- حجم متوازي المستطيلات = ...

a) $l \times w \times h$　　b) l^3　　c) $2\ \pi r$　　d) $6\ l^2$

6 - متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي $8\ cm$, $5\ cm$, $4\ cm$ ، فإن حجمه يساوى

a) $160\ cm^3$　　b) $17\ cm^3$　　c) $20\ cm^3$　　d) $12\ cm^3$

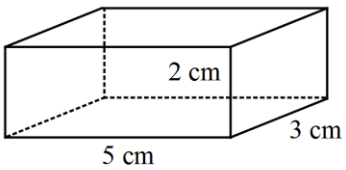
7- مكعب طول ضلعه $6\ cm$ فإن مساحته ا تساوى ....

a) $216\ cm^2$　　b) $36\ cm^2$　　c) $6\ cm^2$　　d) $18\ cm^2$

8- كرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فإن حجمها يساوى ....

a) $113.04\ cm^3$　　b) $3\ cm^3$　　c) $27\ cm^3$　　d) $100\ cm^3$

9- مساحة متوازي المستطيلات تساوى ....



a) $62\ cm^2$　　b) $36\ cm^2$　　c) $10\ cm^2$　　d) $30\ cm^2$

10- مكعب مساحته $216\ cm^2$, فإن طول حرفه يساوي ....

a) $6\ cm$ b) $5\ cm$ c) $4\ cm$ d) $8\ cm$

11- حجم الاسطوانة = ...

a) $\pi\ r^2\ h$ b) $\pi\ r^2$ c) $6\ l^2$ d) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$

12- مكعب حجمه $27\ cm^3$, فإن طول حرفه يساوي

a) $3\ cm$ b) $7\ cm$ c) $2\ cm$ d) $4\ cm$

13- كرة نصف قطرها $6\ cm$, فإن مساحتها تساوي ....

a) $452.16\ cm^2$ b) $450\ cm^2$ c) $216\ cm^2$ d) $36\ cm^2$

14- مخروط دائري قائم ذ صف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 13 cm , فإن مساحته تساوي ....

a) $621.72\ cm^2$ b) $400.26\ cm^2$ c) $244.92\ cm^2$ d) $78\ cm^2$

15- حجم المخروط = ...

a) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ b) $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ c) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ d) $\pi\ r^2$

16- مخروط دائري قائم ذ صف قطر قاعدته 9 cm و طول ارتفاعه 13 cm , فإن حجم المخروط يساوي ....

a) $1102.14\ cm^3$ b) $1100\ cm^3$ c) $78\ cm^3$ d) $4\ cm^3$

17- أسطوانة ارتفاعها $15\ cm$ و نصف قطرها $5\ cm$ فإن حجم الأسطوانة تساوي

a) $1177.5\ cm^3$ b) $177.5\ cm^3$ c) $375\ cm^3$ d) $20\ cm^3$

18- بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 9\ cm\ , b = 5\ cm\ ,\ c = 2\ cm$ فإن حجم البيضاوي = ...

a) $376.8\ cm^3$ b) $177.5\ cm^3$ c) $16\ cm^3$ d) $90\ cm^3$

19- حجم البيضاوي =

a) $\frac{4}{3}\ \pi\ a\ b\ c$ b) $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$ c) $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$ d) $\pi\ r^2$

20- بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 10\ cm\ , b = 7\ cm\ ,\ c = 3\ cm$

فإن مساحة البيضاوي $\approx$ ....

a) $547.65\ cm^2$ b) $400.26\ cm^2$ c) $246.87\ cm^2$ d) $210\ cm^2$

<table>
<tr><th colspan="6">نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة</th></tr>
<tr><td colspan="6">بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسـطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع عـلامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.</td></tr>
<tr><th rowspan="2">م</th><th rowspan="2">العناصـــر</th><th colspan="4">مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)</th></tr>
<tr><th>غير قابل للتطبيق</th><th>لا</th><th>جزئيا</th><th>كليا</th></tr>
<tr><td>٣١</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٣٢</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٣٣</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٣٤</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٣٥</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>٣٦</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.</td></tr>
</table>

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة ....، قيم نفسك وقدراتك بواسـطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع عـلامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصـــر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
٣٧					
٣٨					
٣٩					
٤٠					
٤١					
٤٢					
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

المراجع

م	المرجع
١	Precalculus 7th Edition by Raymond Barnett Michael Ziegler , Karl Byleen , David Sobecki
٢	Abstract Algebra An Inquiry Based Approach, Jonathan k. Hodge, Taylor & Francis Group, 1St Edition, 21 December 2013
٣	Basic Engineering Mathematics 5th Edition. JOHN BIRD
٤	Essential Mathematics for Engineers, W.J.R.H Pooler, 1St Edition, 2011, Bookboon,
٥	الجبر ، الأستاذ دكتور عادل نسيم أديب، دار النشر للجامعات
٦	أساسيات الرياضيات ، حسين رجب محمد ، دار الفجر للنشر والتوزيع
٧	مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والانسانية